ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

1A – Cycle de transition – Année 2015-2016

esiea ECOLE D'INGENIEURS DU MONDE NUMERIQUE

SUITES ET FONCTIONS : EXAMEN DU JEUDI 21 JANVIER

Durée de l'épreuve : 90 minutes

*L'examen comporte **cinq exercices**. Documents et calculatrices sont **interdits**.*
La qualité de la rédaction et la présentation entreront dans l'appréciation des copies.
L'intégralité du sujet devra être rendue avec la copie.

Exercice 1 [6 points]

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par les égalités suivantes.

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 2 \qquad u_{n+2} = \frac{3u_n u_{n+1}}{2u_n + u_{n+1}}$$

1. Montrer par récurrence que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs.

Il est donc possible de poser $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme ; en déduire une expression simple de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ afin de montrer la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 [5 points]

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et par l'égalité suivante pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2n+2} - \frac{1}{(n+1)!}$$

1. Calculer x_1, x_2 et x_3. Simplifier les résultats.

2.a. Démontrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $y_n = n! \times x_n$ est une suite arithmético-géométrique.

2.b. En déduire une expression de y_n puis de x_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3.a. Donner *sans justifier* un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$.

3.b. Comment peut-on qualifier la *vitesse de convergence* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers sa limite ?

Exercice 3 [3,5 points]

On note f la fonction de la variable réelle x vérifiant l'égalité suivante.

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. *Justifier avec précision.*

2. Étudier la limite de f en $-\infty$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.

3. La fonction f peut-elle être prolongée en une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$? Pourquoi ?

Exercice 4 [6 points]

Pour chacune des affirmations figurant sur l'**ANNEXE**, déterminer *sans justifier* si elle est VRAIE ou FAUSSE en cochant la case correspondante. Une réponse correcte apporte 0,5 point ; une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. En cas de total négatif à l'exercice, celui-ci sera ramené à 0.

Exercice 5 [2,5 points]

Relier une limite de la colonne de gauche à sa valeur dans la colonne de droite. Chaque élément, qu'il provienne de la colonne de gauche ou de la colonne de droite, peut servir une ou plusieurs fois... ou ne pas être utilisé du tout !

Une réponse correcte apporte 0,5 point ; une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Un éventuel total négatif sera ramené à 0. *Aucune justification n'est attendue.*

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$ •	
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + \ln x}{x^2}\right)$ •	• $-\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\cos x + x^2}{1 - x}\right)$ •	• 0
$\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{2x - x^2 - 1}\right)$ •	• 1
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right)$ •	• $+\infty$
$\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x - 1}{1 - \sqrt{x}}\right)$ •	

ANNEXE

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ______________________________

	VRAI	FAUX
1. Il existe au moins un réel x vérifiant $x^7 + 2x^4 - 1 = 0$.	☐	☐
2. Pour tout entier n au voisinage de $+\infty$, on a la relation $5n^3 = o(2^n)$.	☐	☐
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.	☐	☐
4. Si deux suites réelles sont adjacentes, alors l'une de ces suites est monotone.	☐	☐
5. Pour tout entier n au voisinage de $+\infty$, on a la relation $n(-1)^n \sim n$.	☐	☐
6. Si f est une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0)\times f(1) < 0$, alors f s'annule.	☐	☐
7. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\lvert x\rvert$ est paire.	☐	☐
8. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle à la fois bornée et décroissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.	☐	☐
9. Toute suite réelle croissante diverge vers $+\infty$.	☐	☐
10. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - n + (-1)^n$ diverge vers $-\infty$.	☐	☐
11. La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x\sin x$ admet une limite en $-\infty$.	☐	☐
12. La suite de Fibonacci et la suite harmonique admettent la même limite en $+\infty$.	☐	☐