Mathématiques et images : devoir du jeudi 24 novembre

Exercice 1 [9,5 points]

Dans l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, on considère l'application linéaire f définie quels que soient les réels x, y et z par l'égalité suivante, ainsi que les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ définis ci-après.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x+4z \\ 5y \\ 4x+3z \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.a. Préciser la matrice A canoniquement associée à l'application f.

1.b. Calculer le polynôme caractéristique de A.

1.c. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A ; préciser les multiplicités associées.

2.a. On rappelle qu'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ est dit *invariant* par f lorsque $f(\vec{u}) = \vec{u}$. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f est le plan d'équation $2x - z = 0$.

2.b. Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée du plan d'équation $2x - z = 0$.

2.c. On pose $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. Calculer $\vec{u}_3$.

2.d. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'égalité $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ vaut $\mathbb{R}\vec{u}_3$.

3. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'application f est *orthodiagonalisable*, c'est-à-dire diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Préciser tous les termes des matrices D, P et P^{-1} vérifiant $A = PDP^{-1}$.

4. Donner la nature géométrique de f et préciser ses éléments caractéristiques.

On introduit le plan Π d'équation $y = 0$ et on désigne par s la symétrie orthogonale par rapport au plan Π.

5.a. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ appartiennent à Π.

5.b. Déterminer la matrice de l'application s dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

5.c. Quelle est la nature géométrique de la composée $f \circ s$? Les applications f et s commutent-elles ? Faire un schéma qualitatif décrivant la situation. *On ne cherchera pas à représenter exactement les objets en présence.*

Exercice 2 [3 points]

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante ; donner ses valeurs propres ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 [4,5 points]

On considère les applications f_1, f_2, f_3 et f_4 définies quels que soient les réels x et y par les égalités suivantes.

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \qquad f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \qquad f_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

On considère la figure $\mathscr{F}$ de l'**ANNEXE**, qui représente un bonhomme. Quel que soit k dans $\{1, 2, 3, 4\}$, on note $\mathscr{F}_k = f_k(\mathscr{F})$. Donner la nature géométrique précise de f_1, de f_2, de f_3 et de f_4 puis dessiner $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ et $\mathscr{F}_4$. *Aucune justification n'est attendue.*

Exercice 4 [5,5 points]

Dans tout l'exercice, a et b désignent des réels **strictement positifs**. On note M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\vec{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ définis par les égalités suivantes.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.a. Que vaut le produit $M\vec{u}$?

1.b. En déduire que la matrice M possède une valeur propre que l'on précisera ; donner un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2.a. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M vérifie $\chi_M = -X(X^2-ab)$.

2.b. Retrouver alors la valeur propre de M déterminée précédemment et montrer que M admet également deux autres valeurs propres, notées λ et μ, vérifiant $\lambda < \mu$.

3.a. Déterminer le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ puis donner le vecteur propre $\vec{u}_\lambda$ de E_λ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.

3.b. Déterminer le sous-espace propre E_μ associé à la valeur propre μ puis donner le vecteur propre $\vec{u}_\mu$ de E_μ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.

4.a. Montrer que la famille $(\vec{u}_\lambda, \vec{u}, \vec{u}_\mu)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.b. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $(\vec{u}_\lambda, \vec{u}, \vec{u}_\mu)$ et on note D la matrice définie par l'égalité $D = P^{-1}MP$. Déterminer tous les coefficients de P et tous les coefficients de D. *Nul besoin de faire beaucoup de calculs...*

4.c. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b la matrice P est-elle orthogonale ? Quelle est alors, dans ce cas, la nature géométrique précise de l'application linéaire canoniquement associée à P ? *Justifier les réponses données.*

Exercice 5 [3,5 points]

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et on pose, pour tout (P, Q) de $E \times E$:

$$\varphi(P, Q) = P(0) \times Q(0) + P(1) \times Q(1).$$

1. Montrer que l'application φ est un produit scalaire sur E.

2. Calculer le produit scalaire de $X + 1$ par $2X$; calculer la norme de $X^2 + 1$.

3. Transformer la base canonique $(1, X, X^2)$ de E en une base orthonormée à l'aide de la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____