ESIEA – ÉCOLE D'INGÉNIEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

2A – Cycle fondamental – Année 2016-2017

MATHÉMATIQUES ET IMAGES : DEVOIR DU JEUDI 17 NOVEMBRE

Exercice 1 [5 points]

Quels que soient les réels x, y et z, on pose :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4y+8z \\ 5x-6y+10z \\ x-y+z \end{pmatrix}.$$

On pose aussi $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que f n'est pas un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$.

2.a. Montrer que $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ est un plan $\mathcal{P}$; en donner une équation cartésienne.

2.b. Donner *sans justifier* une base orthonormée $(\vec{a}, \vec{b})$ du plan $\mathcal{P}$.

3.a. Montrer que la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3.b. La base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est-elle orthogonale ? orthonormée ? Justifier.

4.a. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4.b. Montrer que $f = s \circ p$ où s est une symétrie centrale et p une application à préciser.

4.c. Prouver que *la composée est commutative*, c'est-à-dire que $s \circ p = p \circ s$.

Exercice 2 [5 points]

Quels que soient les réels x, y et z, on pose :

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y+2z \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la matrice A de l'application g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.a. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A, puis déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A associés.

2.b. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

3. Déterminer une base orthonormée directe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 [4,5 points]

Sur l'**ANNEXE 1**, relier un début de phrase de la colonne de gauche à une fin de phrase de la colonne de droite, de manière à ce que les propositions ainsi constituées soient vraies. Chaque partie de phrase peut servir une ou plusieurs fois... ou ne pas être utilisée du tout ! *Aucune justification n'est attendue.*

Une réponse correcte apporte 0,5 point ; une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Un éventuel total négatif sera ramené à 0. *Toutes les matrices représentent des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dans des bases orthonormées directes.*

Exercice 4 [6,5 points]

Dans tout l'exercice, a et b désignent des réels **strictement positifs**. On note M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\vec{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ définis par les égalités suivantes.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.a. Que vaut le produit $M\vec{u}$?

1.b. En déduire que la matrice M possède une valeur propre que l'on précisera ; donner un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2.a. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M vérifie $\chi_M = -X(X^2-ab)$.

2.b. Retrouver alors la valeur propre de M déterminée précédemment et montrer que M admet également deux autres valeurs propres, notées λ et μ, vérifiant $\lambda < \mu$.

3.a. Déterminer le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ puis donner le vecteur propre $\vec{u}_\lambda$ de E_λ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.

3.b. Déterminer le sous-espace propre E_μ associé à la valeur propre μ puis donner le vecteur propre $\vec{u}_\mu$ de E_μ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.

4.a. Montrer que la famille $(\vec{u}_\lambda, \vec{u}, \vec{u}_\mu)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.b. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $(\vec{u}_\lambda, \vec{u}, \vec{u}_\mu)$ et on note D la matrice définie par l'égalité $D = P^{-1}MP$. Déterminer tous les coefficients de P et tous les coefficients de D. *Nul besoin de faire beaucoup de calculs...*

4.c. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b la matrice P est-elle orthogonale ? Quelle est alors, dans ce cas, la nature géométrique précise de l'application linéaire canoniquement associée à P ? *Justifier les réponses données.*

Exercice 5 [4,5 points]

On considère les applications f_1, f_2, f_3 et f_4 définies quels que soient les réels x et y par les égalités suivantes.

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix} \qquad f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \qquad f_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

On considère la figure $\mathscr{F}$ de l'**ANNEXE 2**, qui représente un bonhomme. Quel que soit l'entier i de $\{1,2,3,4\}$, on note $\mathscr{F}_i = f_i(\mathscr{F})$. Donner la nature géométrique précise de f_1, de f_2, de f_3 et de f_4 puis dessiner $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ et $\mathscr{F}_4$. *Aucune justification n'est attendue.*

ANNEXE 1

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ______________________________

La matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ... •	
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ... •	• ... est la matrice d'une rotation.
La matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ ... •	• ... est la matrice d'une projection orthogonale.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ... •	• ... est la matrice d'une symétrie orthogonale.
La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ... •	• ... est la matrice d'une symétrie centrale.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ... •	• ... est la matrice d'une homothétie.
La matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ... •	