ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

2A – Cycle fondamental – Année 2014-2015

MATHÉMATIQUES ET IMAGES : EXAMEN DU LUNDI 19 JANVIER

Durée de l'épreuve : 90 minutes

L'examen comporte ***quatre exercices****. Documents et calculatrices sont* ***interdits****.*
La qualité de la rédaction et la présentation entreront dans l'appréciation des copies.

L'intégralité du sujet devra être rendue avec la copie.

Exercice 1 [9 points]

On considère les applications f, g et t définies quels que soient les réels x et y par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où A et B sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\vec{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B sont des matrices orthogonales.

2.a. Calculer le polynôme caractéristique de A ; en déduire les valeurs propres de A.

2.b. Déterminer les sous-espaces propres de A associés à ces valeurs propres.

2.c. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

2.d. Préciser la nature géométrique de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. Montrer que g est une rotation vectorielle dont on déterminera l'angle.

4.a. La fonction t est-elle une application linéaire ? Justifier.

4.b. Montrer que t est bijective en déterminant l'expression algébrique de sa réciproque t^{-1}.

5.a. Représenter sur l'**ANNEXE 1** les sous-espaces propres déterminés à la question **2.b.**

5.b. On note $\mathscr{F}$ la figure de l'**ANNEXE 1**, qui représente un bonhomme. Dessiner les images $f(\mathscr{F})$, $g(\mathscr{F})$ ainsi que $(t \circ g \circ t^{-1})(\mathscr{F})$ de la figure $\mathscr{F}$. *Aucune justification n'est attendue.*

Exercice 2 [4 points]

Sur l'**ANNEXE 2**, relier un début de phrase de la colonne de gauche à une fin de phrase de la colonne de droite, de manière à ce que les propositions ainsi constituées soient vraies. Chaque partie de phrase peut servir une ou plusieurs fois... ou ne pas être utilisée du tout !

Une réponse correcte apporte 0,5 point ; une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Un éventuel total négatif sera ramené à 0. *Aucune justification n'est attendue.*

Exercice 3 [5 points]

Soit φ l'application linéaire définie quels que soient les réels x, y et z par :

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + z \\ 4x - y + 2z \\ -2x + y \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sera noté $\vec{e}_3$.

1. Prouver que φ n'est pas un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que l'ensemble $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(\vec{u}) = \vec{u}\}$ est un plan P dont on précisera une équation cartésienne et dont on déterminera une base orthonormée notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

3. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Est-elle orthogonale ? orthonormée ? Justifier.

4.a. Déterminer la matrice de φ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

4.b. En déduire la nature géométrique de φ ainsi que ses éléments caractéristiques.

Exercice 4 [3 points]

Déterminer *sans justifier* si chacune des affirmations suivantes est VRAIE ou FAUSSE en ***cochant la case correspondante sur l'énoncé***. Une réponse correcte apporte 0,25 point ; une réponse incorrecte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Toutes les affirmations se rapportent aux objets ci-après :

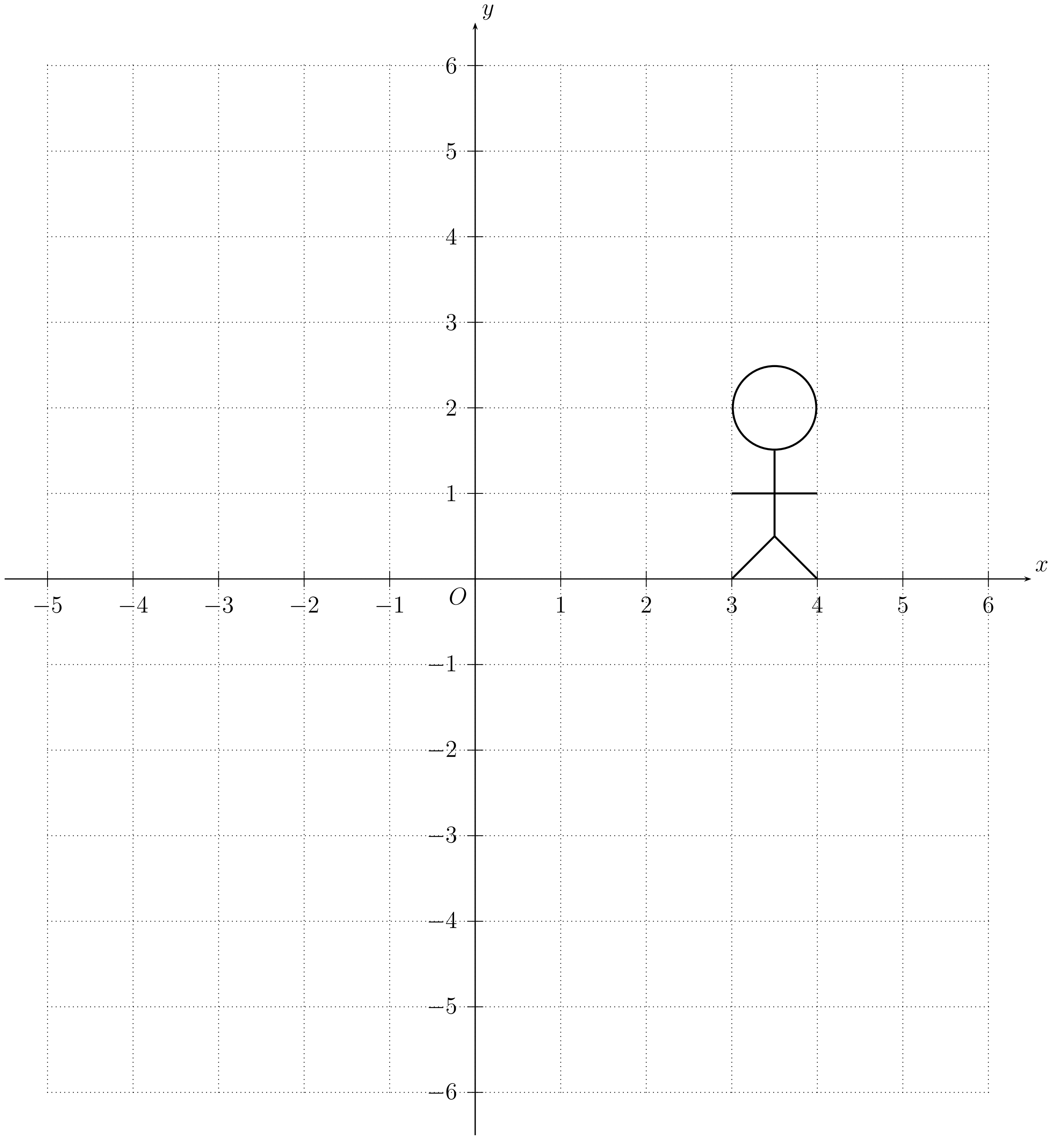
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
1. On a l'égalité $\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.	☐	☐
2. Le déterminant de N est égal à 4.	☐	☐
3. Le vecteur $\vec{a}$ est unitaire.	☐	☐
4. On a l'égalité $M + N = MN$.	☐	☐
5. On a l'égalité $\Vert\vec{b}\Vert = \Vert\vec{c}\Vert$.	☐	☐
6. Le produit scalaire $\vec{b} \cdot \vec{b}$ est égal à -3.	☐	☐
7. Le vecteur $\vec{a}$ est un vecteur propre de N.	☐	☐
8. Le réel -1 est une valeur propre de M.	☐	☐
9. Le polynôme caractéristique de M vaut $(2 - X)^3$.	☐	☐
10. Les droites $\mathbb{R}\vec{a}$ et $\mathbb{R}\vec{b}$ sont orthogonales.	☐	☐
11. La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est liée.	☐	☐
12. La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.	☐	☐

ANNEXE 1

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____



ANNEXE 2

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____________________

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ...	•	•	... est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ...	•	•	... est un vecteur directeur du plan d'équation $x - y + 2z = 0$.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ...	•	•	... est un vecteur normal au plan d'équation $x = y + z$.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ...	•	•	... est un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ...	•	•	... est un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.