École supérieure d'informatique, électronique, automatique

2A – Cycle fondamental – Année 2014-2015

Mathématiques et images : devoir du lundi 27 octobre

Exercice 1 [8 points]

On définit les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ainsi que les matrices A et B par les égalités suivantes.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a. Vérifier que la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.b. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ engendré par $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

2.a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2.b. Utiliser le résultat de la question **2.a.** pour déterminer les valeurs propres de A ; préciser la multiplicité de chacune des valeurs trouvées.

2.c. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés aux valeurs propres trouvées précédemment.

2.d. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

3.a. Calculer les produits $B\vec{a}$, $B\vec{b}$ et $B\vec{c}$ en fonction de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

3.b. Pourquoi peut-on affirmer que tout vecteur $\vec{u}$ appartenant au plan $\mathscr{P}$ vérifie $B\vec{u} = \vec{u}$?

3.c. Donner une matrice diagonale D ainsi qu'une matrice P vérifiant $B = PDP^{-1}$.

3.d. La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

4. Donner la nature géométrique de la fonction qui à tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ associe $\begin{pmatrix} 3x+y \\ -2x \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 2 [8 points]

Pour chacune des quarante affirmations de l'**annexe 1**, déterminer *sans justifier* si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Une réponse correcte apporte 0,2 point ; une réponse incorrecte enlève 0,2 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point.

Exercice 3 [4 points]

Soit f l'application linéaire définie pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$.

1.a. Résoudre l'équation $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, où λ est un réel quelconque et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

1.b. En déduire les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. En calculant le polynôme caractéristique d'une matrice que l'on précisera, vérifier les valeurs propres de f trouvées précédemment.

3. Sur l'**annexe 2**, tracer les sous-espaces propres déterminés à la question **1.b.** puis dessiner l'image $\mathscr{F}'$ de la figure $\mathscr{F}$ par l'application f, en portant une attention toute particulière à l'image du point K. Quelle est la nature géométrique de f ?

ANNEXE 1
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____

Question 1

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs définis ci-après.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
1. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ est libre.	☐	☐
2. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est liée.	☐	☐
3. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.	☐	☐
4. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_4)$ est libre.	☐	☐
5. L'espace vectoriel $\mathcal{V}\text{ect}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5)$ est de dimension 2.	☐	☐

Question 2

On considère la matrice M et le vecteur $\vec{x}$ définis ci-après.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
6. Le réel 0 est une valeur propre de M.	☐	☐
7. Le réel 1 est une valeur propre de M.	☐	☐
8. Le réel 3 est une valeur propre de M.	☐	☐
9. Le polynôme caractéristique de M est égal à $-X^2(X-3)$.	☐	☐
10. Le vecteur $\vec{x}$ est un vecteur propre de M.	☐	☐

Question 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les quatre vecteurs définis ci-après.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
11. Le vecteur $\vec{y}$ appartient à $\mathcal{V}\text{ect}\,(\vec{u}_1)$.	☐	☐
12. Le vecteur $\vec{y}$ appartient à $\mathcal{V}\text{ect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.	☐	☐
13. Le vecteur $\vec{y}$ appartient à $\mathcal{V}\text{ect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.	☐	☐
14. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.	☐	☐
15. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée.	☐	☐
16. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
17. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ engendre $\mathbb{R}^3$.	☐	☐

Question 4

On considère les matrices E, F, G et H définies comme suit.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
18. Il est possible de calculer le produit EF.	☐	☐
19. Il est possible de calculer le produit FG.	☐	☐
20. Il est possible de calculer le produit GH.	☐	☐
21. Il est possible de calculer le produit HE.	☐	☐
22. Le polynôme caractéristique de E est égal à $X^2 - 2X + 1$.	☐	☐
23. Le polynôme caractéristique de H est égal à $X^2 - 2X + 1$.	☐	☐
24. On a $E^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.	☐	☐
25. On a $H^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.	☐	☐

Question 5

On considère les ensembles E_1 et E_2 définis comme suit.

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \right\} \qquad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ -x + 2y = 0 \right\}$$

	VRAI	FAUX
26. L'ensemble E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
27. L'ensemble E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
28. L'ensemble E_1 est un sous-espace vectoriel de dimension 1.	☐	☐
29. L'ensemble E_2 est un sous-espace vectoriel de dimension 1.	☐	☐
30. L'intersection $E_1 \cap E_2$ est une droite.	☐	☐
31. L'intersection $E_1 \cap E_2$ est un plan.	☐	☐
32. Les ensembles E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.	☐	☐

Question 6

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ainsi que les matrices A et B définis ci-après.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
33. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur propre de A.	☐	☐
34. Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de A.	☐	☐
35. Le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur propre de A.	☐	☐
36. Dans une base donnée, la matrice A représente une projection.	☐	☐
37. Dans une base donnée, la matrice B représente une projection.	☐	☐
38. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.	☐	☐
39. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.	☐	☐
40. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.	☐	☐

ANNEXE 2
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____________________