École supérieure d'informatique, électronique, automatique

2A – Cycle fondamental – Année 2014-2015

Mathématiques et images : devoir de révisions du lundi 13 octobre

Exercice 1

Caractériser géométriquement la fonction f définie pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les six vecteurs suivants.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Dans chaque cas, former une famille répondant aux conditions données, en n'utilisant que les vecteurs précédents. Indiquer les cas d'impossibilité. *Aucune justification n'est attendue.*

1.a. Une famille liée de trois vecteurs.

1.b. Une famille de deux vecteurs engendrant $\mathbb{R}^3$.

1.c. Une famille libre de quatre vecteurs.

1.d. Une base de $\mathbb{R}^3$ comportant les vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_6$.

1.e. Une famille liée de deux vecteurs.

1.f. Une famille de trois vecteurs n'engendrant pas $\mathbb{R}^3$.

On définit les applications linéaires f et g dont les matrices respectives dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ sont les matrices A et B vérifiant :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.a. Montrer qu'une équation cartésienne de Im g est $-x+y+z=0$.

2.b. Démontrer l'égalité Im g = Im $(\mathrm{id} - f)$, où id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

3.a. Déterminer le noyau de f et le noyau de g.

3.b. Le réel 0 est-il une valeur propre de f ? une valeur propre de g ? Justifier.

4.a. Montrer que la famille $(\vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.b. Exprimer $f(\vec{v}_4)$, $f(\vec{v}_5)$ et $f(\vec{v}_6)$ en fonction de $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ et $\vec{v}_6$; en déduire la matrice de f dans la base $(\vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6)$.

4.c. Caractériser géométriquement l'application f.

5.a. Montrer que le polynôme caractéristique χ_B de la matrice B vérifie $\chi_B = -X(X-1)^2$.

5.b. Préciser les valeurs propres de B et déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

5.c. La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.