ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

2A – Cycle fondamental – Année 2014-2015

esiea ECOLE D'INGENIEURS DU MONDE NUMERIQUE

MATHÉMATIQUES ET IMAGES : DEVOIR DE RÉVISIONS DU LUNDI 22 SEPTEMBRE

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-y \\ z-x \\ 2z-x-y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est linéaire.

On note F l'ensemble des vecteurs *invariants* par f, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\vec{u}) = \vec{u}$. Par ailleurs, on pose $G = \text{Ker } f$.

2.a. Expliciter F et montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; en préciser une base.

2.b. Reprendre la question précédente pour G.

3. Montrer que les vecteurs utilisés pour la base de F et la base de G permettent de former une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

4.a. Exprimer $f(\vec{b}_1)$, $f(\vec{b}_2)$ et $f(\vec{b}_3)$ en fonction de $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ et $\vec{b}_3$.

4.b. En déduire, pour X, Y et Z trois réels quelconques, l'expression de $f(X\vec{b}_1 + Y\vec{b}_2 + Z\vec{b}_3)$ en fonction de X, Y, Z, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ et $\vec{b}_3$.

5. Quelle transformation géométrique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ représente la fonction f ?

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les quatre vecteurs suivants.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées de $\vec{c}$ dans cette base.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est-elle libre ? liée ? Justifier.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de la manière suivante.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On considère également l'ensemble F défini par $F = \mathcal{V}\text{ect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1.a. Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

1.b. Quelle est une équation cartésienne de F ? Justifier.

2.a. Donner un sous-espace vectoriel G différent de $\{\vec{0}\}$ tel que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

2.b. Écrire tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v}$ dans F et $\vec{w}$ dans G.