ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

2A – Cycle fondamental – Année 2014-2015

Mathématiques et images : devoir du lundi 27 octobre (**correction**)

Exercice 1

1.a. La dimension de $\mathbb{R}^3$ est égale à 3 or la famille $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est constituée de trois vecteurs. Pour prouver que $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit donc de prouver que $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est libre.

Considérons trois réels α, β et γ tels que $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$. Cette égalité se réécrit :

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

De là :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\gamma&=&0\\-\alpha-2\gamma&=&0\\\beta&=&0.\end{array}\right.$$

En isolant α dans la première équation puis en reportant sa valeur dans la deuxième équation, il vient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&-\gamma\\\gamma-2\gamma&=&0\\\beta&=&0.\end{array}\right.$$

De ce dernier système découlent les égalités $\beta=0$, $\gamma=0$ puis $\alpha=0$. Nous pouvons donc affirmer que $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est libre.

$$\boxed{\text{La famille } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

1.b. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathscr{P}$ est engendré par les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{P}\iff\exists(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}.$$

Par suite, en remplaçant avec la définition des vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{P}\iff\exists(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl}x&=&\mu\\y&=&-2\mu\\z&=&\lambda.\end{array}\right.$$

De là :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{P}\iff\exists(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl}\lambda&=&z\\\mu&=&x\\2x+y&=&0.\end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \mathscr{P} \text{ est donc } 2x+y=0.}$$

2.a. Le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est défini par :

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ -2 & -X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, il vient :

$$\chi_A = (-1)^{3+3} \times (1-X) \times \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 \\ -2 & -X \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A = (1-X)((3-X)(-X) - (-2) \times 1).$$

Après factorisation et quelques regroupements bien pensés, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } A \text{ est égal à } -(X-1)^2(X-2).}$$

2.b. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ admet exactement deux valeurs propres, qui sont 1 et 2.}}$$

De manière plus précise :

$$\boxed{\text{le réel 1 est valeur propre double; le réel 2 est valeur propre simple.}}$$

2.c. Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Alors, pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & x \\ -2x + 2z & = & y \\ z & = & z. \end{array} \right.$$

La dernière équation du système étant inutile, nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ -2x - y + 2z & = & 0. \end{array} \right.$$

L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ amène alors au système suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array} \right.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc la droite } \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

Si E_2 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, alors, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

De là :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 2x \\ -2x + 2z & = & 2y \\ z & = & 2z. \end{array} \right.$$

Par suite :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ -2x - 2y + 2z & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array} \right.$$

En remarquant que les deux premières équations du système sont équivalentes, il est possible d'écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array} \right.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est donc la droite } \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

3.a. Il suffit d'effectuer les produits demandés ; il vient :

$$\boxed{B\vec{a} = 2\vec{a},\ B\vec{b} = \vec{b} \text{ et } B\vec{c} = \vec{c}.}$$

3.b. Soit $\vec{u}$ un élément de $\mathscr{P}$. Il existe alors deux réels λ et γ vérifiant $\vec{u} = \lambda\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Nous pouvons ainsi écrire :

$$B\vec{u} = B(\lambda\vec{b} + \gamma\vec{c}).$$

Par linéarité, il vient alors :

$$B\vec{u} = \lambda B\vec{b} + \gamma B\vec{c}.$$

D'après la question précédente, l'égalité devient :

$$B\vec{u} = \lambda\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

De là :

$$B\vec{u} = \vec{u}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall \vec{u} \in \mathscr{P},\ B\vec{u} = \vec{u}.}$$

3.c. La question **1.a.** permet d'affirmer que la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc d'effectuer un $\boxed{\text{changement de base.}}$

En effet, à supposer que B représente une application linéaire g dans une base $\mathscr{B}$ donnée, les calculs effectués à la question **3.a.** assurent que g se représente dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ par la matrice D définie par :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

La matrice P est alors la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3.d. La matrice $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$ par définition : il existe une matrice diagonale D ainsi qu'une matrice inversible P vérifiant $B = PDP^{-1}$.

4. En notant g l'application donnée par l'énoncé, alors B est la représentation de g dans la base canonique usuelle de $\mathbb{R}^3$. D'après les questions précédentes, la représentation de g dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est la matrice D, qui est une matrice de dilatation.

$$\boxed{\text{L'application } g \text{ est donc une dilatation de rapport 2, de base } \mathscr{P}, \text{ de direction } \mathbb{R}\vec{a}.}$$

Exercice 2

$$\boxed{\text{Voir les réponses sur l'ANNEXE 1.}}$$

Exercice 3

Considérons un réel λ ainsi que deux réels x et y vérifiant $(x\,;y) \neq (0\,;0)$. Nous pouvons écrire les équivalences successives suivantes :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+4y & = & 5\lambda x \\ 4x-3y & = & 5\lambda y. \end{array} \right.$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (3-5\lambda)x+4y & = & 0 \\ 4x+(-3-5\lambda)y & = & 0. \end{array} \right.$$

En isolant y au sein de la première équation puis en reportant sa valeur dans la deuxième équation, il vient :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{5\lambda - 3}{4}x \\ \\ 4x + (-3-5\lambda)\dfrac{5\lambda-3}{4}x = 0. \end{array} \right.$$

Par suite, en multipliant par 4 la deuxième équation et après développement :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{5\lambda - 3}{4} x \\ \\ 16x + (9 - 25\lambda^2)x = 0. \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors décomposer le système en deux sous-systèmes plus simples :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{5\lambda - 3}{4} x \\ \\ x = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{5\lambda - 3}{4} x \\ \\ 25 - 25\lambda^2 = 0. \end{array} \right.$$

D'où :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \\ x = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{5\lambda - 3}{4} x \\ \\ \lambda^2 = 1 \end{array} \right.$$

Comme le couple $(x\,;y)$ n'est pas nul, le premier système est à exclure ; le second système donne alors à son tour deux sous-systèmes :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{5\lambda - 3}{4} x \\ \\ \lambda = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{5\lambda - 3}{4} x \\ \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$$

Finalement :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{x}{2} \\ \\ \lambda = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$$

En conclusion, nous avons l'équivalence, pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ et λ dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ \lambda = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ \lambda = -1 \end{array} \right.}$$

1.b. Dans la question précédente, nous avons résolu directement l'équation caractéristique. Nous pouvons donc affirmer, sans aucun autre calcul, que $\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont } 1 \text{ et } -1}$.

Par ailleurs, en notant E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et E_{-1} le sous-espace propre associé à la valeur propre -1, nous avons montré :

$$\boxed{E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

2. Introduisons la matrice A définie par

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique χ_A de cette matrice vérifie :

$$\chi_A = \left(\frac{3}{5} - X\right)\left(-\frac{3}{5} - X\right) - \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

Il vient donc, après quelques calculs :

$$\boxed{\chi_A = (X-1)(X+1).}$$

Étant donné que les valeurs propres de f sont les racines de χ_A, il est possible de conclure que l'application f admet deux valeurs propres, qui sont 1 et -1.

$$\boxed{\text{Ces valeurs confirment ce qui a été trouvé précédemmment.}}$$

3. $\boxed{\text{Voir l'}\textbf{ANNEXE 2}}$ pour les tracés demandés.

D'après les questions précédentes, la matrice de f dans une base de vecteurs propres de f est une matrice de symétrie.

De manière plus précise, la matrice de f dans la base $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc la symétrie par rapport à la droite } \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ de direction } \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.}$$

On construit la figure point par point car une symétrie conserve les longueurs. Toutes les images sont situées sur un nœud du quadrillage, sauf le point K.

Pour l'image de K, on peut s'aider du point de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et du compas ou de l'équerre, comme indiqué sur l'**ANNEXE 2**.

ANNEXE 1

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____________________

Question 1

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs définis ci-après.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
1. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ est libre.	☐	⊠
2. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est liée.	⊠	☐
3. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.	☐	⊠
4. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_4)$ est libre.	⊠	☐
5. L'espace vectoriel $\mathcal{V}\mathrm{ect}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5)$ est de dimension 2.	⊠	☐

Question 2

On considère la matrice M et le vecteur $\vec{x}$ définis ci-après.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
6. Le réel 0 est une valeur propre de M.	⊠	☐
7. Le réel 1 est une valeur propre de M.	☐	⊠
8. Le réel 3 est une valeur propre de M.	⊠	☐
9. Le polynôme caractéristique de M est égal à $-X^2(X-3)$.	⊠	☐
10. Le vecteur $\vec{x}$ est un vecteur propre de M.	⊠	☐

Question 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les quatre vecteurs définis ci-après.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
11. Le vecteur $\vec{y}$ appartient à $\mathcal{V}\mathrm{ect}\,(\vec{u}_1)$.	☐	☒
12. Le vecteur $\vec{y}$ appartient à $\mathcal{V}\mathrm{ect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.	☐	☒
13. Le vecteur $\vec{y}$ appartient à $\mathcal{V}\mathrm{ect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.	☐	☒
14. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.	☐	☒
15. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée.	☒	☐
16. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
17. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ engendre $\mathbb{R}^3$.	☐	☒

Question 4

On considère les matrices E, F, G et H définies comme suit.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
18. Il est possible de calculer le produit EF.	☒	☐
19. Il est possible de calculer le produit FG.	☐	☒
20. Il est possible de calculer le produit GH.	☐	☒
21. Il est possible de calculer le produit HE.	☒	☐
22. Le polynôme caractéristique de E est égal à $X^2 - 2X + 1$.	☐	☒
23. Le polynôme caractéristique de H est égal à $X^2 - 2X + 1$.	☐	☒
24. On a $E^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.	☒	☐
25. On a $H^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.	☐	☒

Question 5

On considère les ensembles E_1 et E_2 définis comme suit.

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z=0 \right\} \qquad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ -x+2y=0 \right\}$$

	VRAI	FAUX
26. L'ensemble E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	☒	☐
27. L'ensemble E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	☒	☐
28. L'ensemble E_1 est un sous-espace vectoriel de dimension 1.	☐	☒
29. L'ensemble E_2 est un sous-espace vectoriel de dimension 1.	☐	☒
30. L'intersection $E_1 \cap E_2$ est une droite.	☒	☐
31. L'intersection $E_1 \cap E_2$ est un plan.	☐	☒
32. Les ensembles E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.	☐	☒

Question 6

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ainsi que les matrices A et B définis ci-après.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
33. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur propre de A.	☒	☐
34. Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de A.	☒	☐
35. Le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur propre de A.	☒	☐
36. Dans une base donnée, la matrice A représente une projection.	☒	☐
37. Dans une base donnée, la matrice B représente une projection.	☒	☐
38. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.	☒	☐
39. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.	☐	☒
40. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.	☒	☐

ANNEXE 2

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ______________________________