Mathématiques et images

Correction du devoir de révision

lundi 13 octobre

Exercice 1

Dans la base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, la matrice de f est la matrice A définie par :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}}$$

Le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, est défini par :

$$\chi_A = \det(A - X I_2)$$

$$\chi_A = \det\begin{pmatrix}4-X & 2\\ 2 & 1-X\end{pmatrix}$$

$$\chi_A = (4-X)(1-X) - 4$$

De là, après calculs : $\underline{\chi_A = X(X-5)}$

Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme χ_A. On peut donc en déduire que <u>les valeurs propres de f sont 0 et 5.</u>

Détermination du sous-espace propre E_0

Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$, on a successivement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0 \iff \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

De là :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0 \iff y = -2x$$

On peut donc écrire : $\boxed{E_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Détermination du sous-espace propre E_5

De même, pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$, il vient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_5 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_5 \iff \begin{cases} 4x + 2y = 5x \\ 2x + y = 5y \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_5 \iff x = 2y$$

Conclusion : on a $\boxed{E_5 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

En posant $b = (\vec{b_1}, \vec{b_2})$ avec

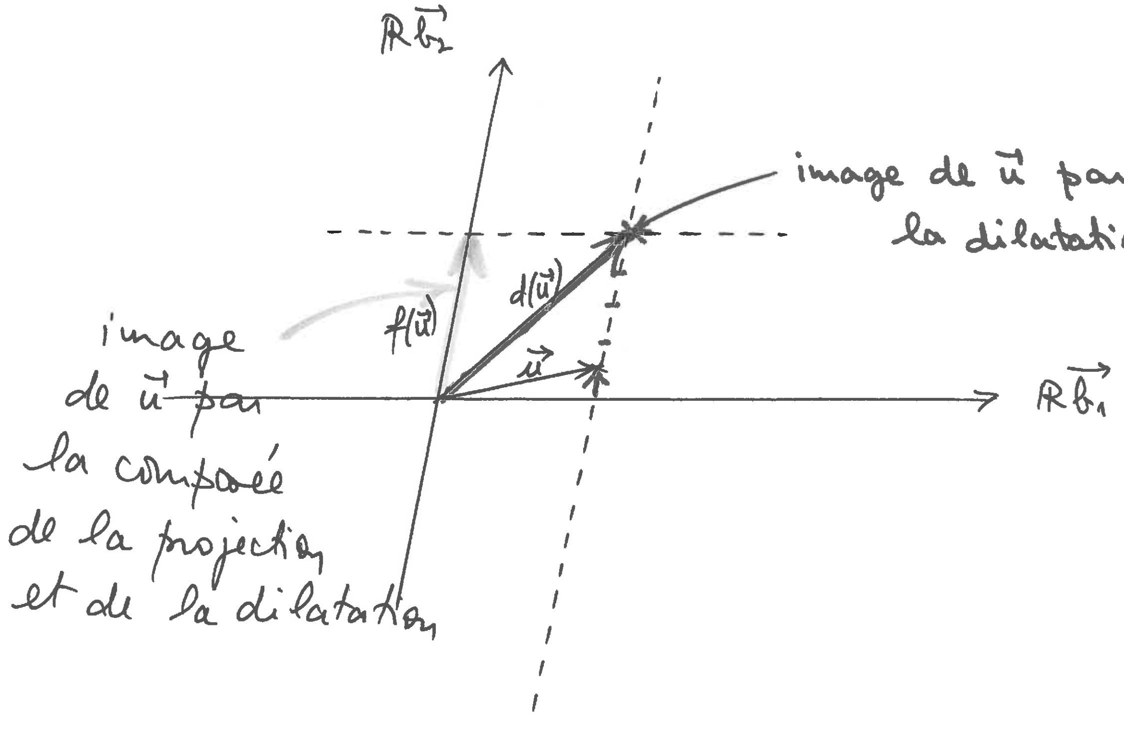
$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on peut affirmer que la matrice de f dans la base b est la matrice D telle que

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

On remarque : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de <u>projection</u> sur $\mathbb{R}\vec{b_2}$ parallèlement à $\mathbb{R}\vec{b_1}$ et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de <u>dilatation</u> de rapport 5, de direction $\mathbb{R}\vec{b_2}$ et de base $\mathbb{R}\vec{b_1}$.



Exercice 2

1.a. la famille $(\vec{v_1}; \vec{v_3}, \vec{v_5})$.

1.b. cas d'impossibilité.

1.c. cas d'impossibilité.

1.d. la famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_6})$.

1.e. cas d'impossibilité.

1.f. la famille $(\vec{v_2}, \vec{v_4}, \vec{v_5})$.

2.a. Pour $(x; y; z)$ dans $\mathbb{R}^3$ et $(x'; y'; z')$ dans $\mathbb{R}^3$, on a les équivalences :

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - y - 2z = x' \\ x - z = y' \\ 2x - y - z = z' \end{cases}$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - z = y' & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2x - y - z = z' & L_2 \leftarrow L_3 \\ 3x - y - 2z = x' & L_3 \leftarrow L_1 \end{cases}$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - z = y' & \\ -y + z = z' - 2y' & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + z = x' - 3y' & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - z = y' & \\ -y + z = z' - 2y' & \\ 0 = x' - y' - z' & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Par définition, on a :

$$\operatorname{Im} g = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\}$$

D'après ce qui précède, on peut donc écrire :

$$\boxed{\operatorname{Im} g = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ 0 = x' - y' - z' \right\}.}$$

La conclusion annoncée est donc prouvée.

2.b. On note C la matrice de $id - f$ dans la base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. On a donc :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A$$

$$C = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}}$$

De même qu'à la question précédente, on a les équivalences successives suivantes pour tout $(x ; y ; z ; x' ; y' ; z')$ de $\mathbb{R}^6$.

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6x-3y-3z=6x' \\ 4x-4z=6y' \\ 2x-3y-5z=6z' \end{cases}$$

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x-2z=3y' & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ 2x-3y-5z=6z' & L_2 \leftarrow L_3 \\ 2x-y-z=2x' & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \end{cases}$$

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x-2z=3y' & \\ -3y-3z=6z'-3y' & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -y+z=2x'-3y' & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x-2z=3y' & \\ -3y-3z=6z'-3y' & \\ 0=6x'-6y'-6z' & L_3 \leftarrow 3L_3-L_2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\operatorname{Im}(id-f)=\left\{\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\quad x'-y'-z'=0\right\}.}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

3.a. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. On a successivement :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker} f \iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} 3y+3z=0 \\ -4x+6y+4z=0 \\ -2x+3y+5z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} y = -z \\ -4x = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : le <u>noyau de f est réduit à $\{\vec{0}\}$</u>.

De même pour $\operatorname{Ker} g$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} g \iff \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} g \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : On a $\boxed{\operatorname{Ker} g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

3. b. <u>Si 0 était une valeur propre</u> de f, alors il existerait un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(\vec{u}) = 0\,\vec{u}$, c'est-à-dire qu'il existerait un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ non nul appartenant à $\operatorname{Ker} f$. <u>C'est faux</u> d'après la

question précédente : on a $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$.

<u>Conclusion :</u> <u>0 n'est pas valeur propre de f.</u>

D'autre part, on a $g\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 . \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ or le

vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas nul. Il existe donc $\vec{u}$

vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g(\vec{u}) = 0\,\vec{u}$.

<u>Conclusion :</u> <u>0 est valeur propre de g.</u>

4.a. Dans $\mathbb{R}^3$, une famille comportant

trois vecteurs est une base si, et seulement

si, c'est une <u>famille libre</u>. Il suffit donc

de montrer que $(\vec{v_4}, \vec{v_5}, \vec{v_6})$ est libre. On

considère trois réels α, β et γ tels que :

$$\alpha \vec{v_4} + \beta \vec{v_5} + \gamma \vec{v_6} = \vec{0}$$

et on montre que l'on a nécessairement

$\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Supposons $\alpha \vec{v_4} + \beta \vec{v_5} + \gamma \vec{v_6} = \vec{0}$.

Alors : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

De là : $\begin{cases} -\alpha = \beta \\ \alpha = \gamma \\ \alpha - \alpha + \alpha = 0 \end{cases}$

Ainsi, $\underline{\alpha = 0 \text{ puis } \beta = 0 \text{ puis } \gamma = 0.}$

La famille $\underline{\underline{(\vec{v_4}, \vec{v_5}, \vec{v_6}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}}$.

4. b. Après calculs, on obtient :

$$f(\vec{v_4}) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v_4}$$

$$f(\vec{v_5}) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{v_5}$$

$$f(\vec{v_6}) = A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\vec{v_6}$$

La matrice de f dans $(\vec{v_4}, \vec{v_5}, \vec{v_6})$ est

donc égale à $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$.

4. c. La matrice précédente se décompose :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On reconnaît des matrices de dilatation.

L'application f est la <u>composée de deux dilatation</u> :

- une dilatation de base $\mathbb{R}\vec{v_4} + \mathbb{R}\vec{v_6}$, de direction $\mathbb{R}\vec{v_5}$ et de rapport $\frac{1}{2}$;

- une dilatation de base $\mathbb{R}\vec{v_4} + \mathbb{R}\vec{v_5}$, de direction $\mathbb{R}\vec{v_6}$ et de rapport $\frac{1}{3}$.

5. a. Le polynôme χ_B est défini par :

$$\chi_B = \det(B - X I_3)$$

$$\chi_B = \det \begin{pmatrix} 3-X & -1 & -2 \\ 1 & -X & -1 \\ 2 & -1 & -1-X \end{pmatrix}$$

On peut développer suivant la <u>deuxième ligne</u> :

$$\chi_B = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1-X \end{vmatrix} - X \begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 2 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_B = -(1+X-2) - X(-3-2X+X^2+4) + (-3+X+2)$$

$$\chi_B = 1 - X \quad - X + 2X^2 - X^3 - 1 + X$$

$$\chi_B = -X^3 + 2X^2 - X$$

$$\chi_B = -X(X^2 - 2X + 1)$$

$$\chi_B = -X(X-1)^2$$

<u>Ce qu'il fallait démontrer.</u>

5. b. Les valeurs propres de B sont les racines de χ_B, c'est-à-dire <u>0 et 1</u>.

- <u>Détermination du sous-espace propre E_0</u>

On remarque : $E_0 = \ker g$ par définition.

De là, $\boxed{E_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

- Détermination du sous-espace propre E_1

Pour $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} 3x - y - 2z = x \\ x - z = y \\ 2x - y - z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} 2x - y - 2x + 2y = 0 \\ z = x - y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

On a donc $\boxed{E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

5. c. La valeur propre 1 est une valeur propre <u>double</u> de g or la dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre n'est que de <u>1</u> : la matrice B n'est donc <u>pas diagonalisable</u>.