

Mathématiques, et images

Correction du devoir de révision

lundi 22 septembre

Exercice 1

1. Soit \vec{u} et \vec{v} dans \mathbb{R}^3 et soit λ dans \mathbb{R} .

on montre : $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

on peut écrire $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec

x, y, z, x', y' et z' six réels quelconques.

on a :

$$f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = f \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda z + z' - (\lambda y + y') \\ \lambda z + z' - (\lambda x + x') \\ 2(\lambda z + z') - (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda(z-y) + z' - y' \\ \lambda(z-x) + z' - x' \\ \lambda(z-z-x-y) + 2z' - x' - y' \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \begin{pmatrix} z-y \\ z-x \\ z-x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'-y' \\ z'-x' \\ 2z'-x'-y' \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. a. On obtient successivement :

$$F = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{u}) = \vec{u} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} z - y = x \\ z - x = y \\ 2z - x - y = z \end{cases} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = z - y \\ z - (z - y) = y \\ 2z - (z - y) - y = z \end{cases} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = z - y \\ 0 = 0 \\ z = z \end{cases} \right\}$$

On peut donc écrire :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \right\}$$

Il est possible de transformer l'écriture de F obtenue précédemment ; en effet, on a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = -y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il vient donc

$$\boxed{F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})}$$

avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On montre ainsi que F est le sous-espace
vectoriel engendré par la famille (\vec{u}, \vec{v}) .

Comme \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires,
la famille (\vec{u}, \vec{v}) est libre. Par suite,
la famille (\vec{u}, \vec{v}) est à la fois libre
et génératrice de F ; ainsi, la famille
 (\vec{u}, \vec{v}) est une base de F .

2. b. On procède de même :

$$G = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \quad f(\vec{u}) = \vec{0} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} z - y = 0 \\ z - x = 0 \\ 2z - x - y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \right\}$$

on peut donc écrire :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \right\}$$

Là encore, réécrivons G différemment :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il vient donc $G = \text{Vect}(\vec{w})$ avec $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'ensemble G est donc le sous-espace
vectoriel engendré par le vecteur \vec{w} .

Comme \vec{w} n'est pas nul, on peut affirmer que la famille (\vec{w}) est libre. Ainsi, la famille (\vec{w}) est libre et génératrice de G .

Conclusion: une base de G est (\vec{w}) .

3. On pose :

$$\cdot \vec{b}_1 = \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \vec{b}_2 = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \vec{b}_3 = \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme la dimension de \mathbb{R}^3 est égale à 3, il suffit de montrer que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est libre pour prouver que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Considérons trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 qui vérifient l'égalité :

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}.$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Par suite, il est clair que :

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_3 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$$

Finalement, on obtient : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Cela montre que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est libre et, par suite, que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

4. a. On sait que \vec{b}_1 est dans F donc,

par définition de F on a $f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$.

Même raisonnement pour \vec{b}_2 : $f(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$.

Comme \vec{b}_3 est dans G , on obtient $f(\vec{b}_3) = \vec{0}$

par définition de $\text{Ker } f$.

4. b. Soit $(x; y; z)$ dans \mathbb{R}^3 . Comme f est une application linéaire, on a :

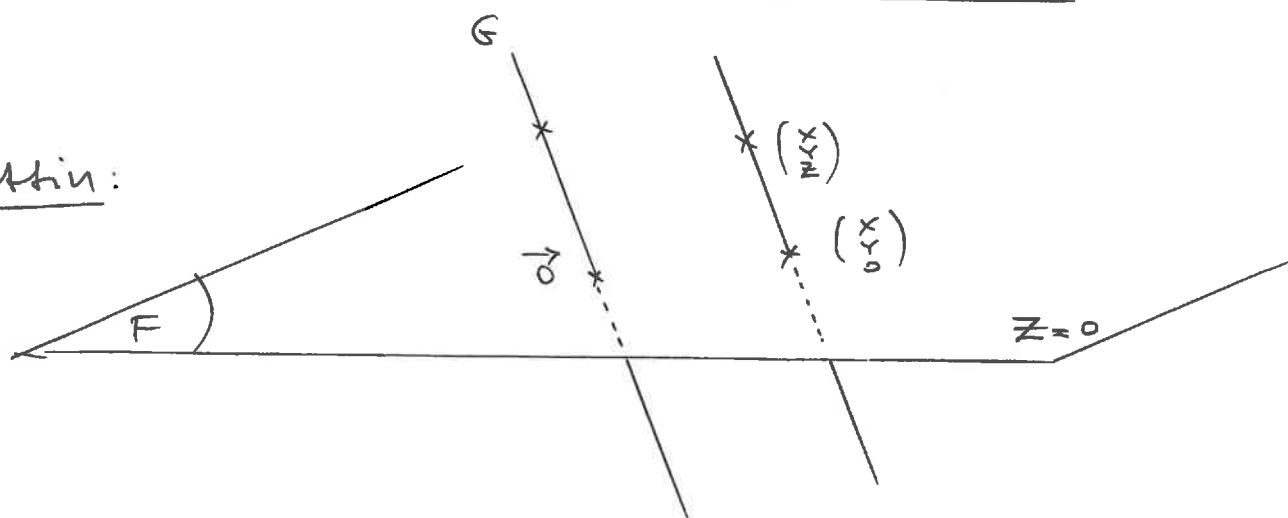
$$f(x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 + z\vec{b}_3) = x f(\vec{b}_1) + y f(\vec{b}_2) + z f(\vec{b}_3)$$

Grâce aux résultats de la question précédente, on peut affirmer :

$$f(x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 + z\vec{b}_3) = x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2$$

5. D'après la question précédente, un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est transformé en un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. L'application f laisse donc fixes les deux premières coordonnées et met à zéro la troisième. Il s'agit d'une projection sur F parallèlement à G .

Dessin :



Exercice 2

1. Comme la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ comporte trois vecteurs et que \mathbb{R}^3 est de dimension égale à 3, il suffit de montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ est liée.

Soit α, β et γ trois réels quelconques. On suppose que l'égalité suivante est vraie :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{d} = \vec{0}. \quad \text{On a alors nécessairement:}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -4\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ -5\beta + \gamma = 0 \\ 11\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

substitution de α
dans L_2 et L_3

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = 5\beta \\ 6\beta = 0 \end{cases}$$

substitution de γ
dans L_3

Il vient donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ce qu'il fallait démontrer.

Ou remarque : $\vec{c} = \vec{a} - \vec{d}$.

Ou peut donc écrire, en notant B la base
égale à $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$: $\boxed{\text{mat}_B(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

2. Montrons que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre. On
considère trois réels α, β et γ tels que :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}.$$

Il vient donc :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma (\vec{a} - \vec{d}) = \vec{0}.$$

De là :

$$(\alpha + \gamma) \vec{a} + \beta \vec{b} - \gamma \vec{d} = \vec{0}.$$

Comme la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ est libre, on

en déduit $\alpha + \gamma = \beta = -\gamma = 0$, et donc

$\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3

1. a. On remarque : $\vec{w} = 2\vec{v} - 2\vec{u}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donc liée.

1. b. D'après la question précédente, on peut écrire $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Pour suite, on a :

$$F = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \right\}$$

car on rappelle que $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de \vec{u} et \vec{v} .

Ainsi :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = 3\lambda + 4\mu \end{cases} \right\}$$

Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ fixé dans \mathbb{R}^3 , résolvons le système en λ et μ suivant :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 2\lambda + 3\mu = y \\ 3\lambda + 4\mu = z \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + 2\mu = x \\ -\mu = y - 2x \\ -2\mu = z - 3x \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + 2\mu = x \\ -\mu = y - 2x \\ 0 = x - 2y + z \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

Il est donc possible d'écrire :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x - 2y + z = 0 \right\}$$

Ce qui répond à la question posée.

2.a. Posons $G = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble

G est alors un espace vectoriel différent

de $\{\vec{0}\}$. Montrons l'égalité $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

- l'inclusion $\{\vec{0}\}$ est triviale puisque $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in G$: on rappelle que tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $F \cap G$. Montrons

que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le vecteur nul.

Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans G , il existe un réel λ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on

a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans

F donc $x - 2y + z = 0$, donc $\lambda - 2 \times 0 + 0 = 0$.

Ainsi, $\lambda = 0$ et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.b. Soit \vec{u} dans \mathbb{R}^3 . On peut écrire \vec{u} sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec x , y et z trois réels donnés.

On a l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - 2y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{En posant } \vec{v} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{w} = (x - 2y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{il vient } \underline{\underline{\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}}}$$

• Montrons que \vec{v} est dans F .

$$\text{On a } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{or on a bien } (2y - z) - 2y + z = 0$$

$$\text{donc } \vec{v} \in F$$

• Montrons que \vec{w} est dans G .

$$\text{on a } \vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = x - 2y + z$$

$$\text{donc } \vec{w} \in G.$$

Ce qu'il fallait démontrer.