ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

2A – Cycle fondamental – Année 2015-2016

MATHÉMATIQUES ET IMAGES : DEVOIR DU VENDREDI 6 NOVEMBRE

Exercice 1 [8 points]

On considère les trois endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ notés f_1, f_2 et f_3 définis pour tout réel x et pour tout réel y par les égalités suivantes.

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-y\\y-x\end{pmatrix} \qquad f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-x-3y\\-3x-y\end{pmatrix} \qquad f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

On pose d'autre part :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

2. Pour tout i de $\{1,2,3\}$, donner *sans justifier* :
- la matrice A_i canoniquement associée à l'application f_i ;
- le polynôme caractéristique χ_i de la matrice A_i ;
- l'ensemble des valeurs propres réelles $\mathrm{sp}(A_i)$ de la matrice A_i.

3. Montrer qu'il existe deux matrices D_1 et D_2 vérifiant $A_1 = PD_1P^{-1}$ et $A_2 = PD_2P^{-1}$. *On explicitera tous les coefficients de D_1 et tous les coefficients de D_2.*

4. Préciser la nature géométrique de chacune des applications f_1, f_2 et f_3.

5. Sur l'ANNEXE, dessiner l'image $\mathscr{F}_1$ de la figure $\mathscr{F}$ par l'application f_1, l'image $\mathscr{F}_2$ de la figure $\mathscr{F}$ par l'application f_2 ainsi que l'image $\mathscr{F}_3$ de la figure $\mathscr{F}$ par l'application f_3.

Exercice 2 [4,5 points]

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on considère les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ définis comme suit. Par ailleurs, on note p la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\vec{u}_1$.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\12\\6\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. À l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt, orthonormaliser la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ en une base orthonormée que l'on notera $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

3.a. Déterminer la matrice de l'application p dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

3.b. En déduire la matrice de l'application p dans la base canonique usuelle de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 [5,5 points]

On considère la matrice S et le vecteur $\vec{u}$ définis par les égalités suivantes.

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que S est une matrice orthogonale.

2.a. Que vaut le produit $S\vec{u}$?

2.b. En déduire que la matrice S admet au moins une valeur propre, que l'on précisera.

3.a. Calculer le polynôme caractéristique de S.

3.b. En déduire l'ensemble des valeurs propres de S et les sous-espaces propres associés.

3.c. La matrice S est-elle diagonalisable ? Justifier.

4. Donner la nature géométrique précise de l'application s définie quels que soient les réels x, y et z par :

$$s\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x+z \\ y\sqrt{2} \\ x+z \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 [2 points]

On considère trois réels quelconques x, y et z vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Démontrer que l'inégalité $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$ est vraie. *On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 5 [2 points]

On se place dans l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles à deux lignes et deux colonnes, que l'on munit de sa structure usuelle d'espace vectoriel réel. On rappelle que la trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{tr}(M)$, est la somme des coefficients diagonaux de M.

On définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en posant, pour tout A et tout B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A \times {}^tB).$$

La norme euclidienne associée à ce produit scalaire est appelée *norme de Frobenius*. Elle est définie pour tout A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}.$$

1. Donner *sans justifier* deux matrices non nulles A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\langle A, B\rangle = 0$.

2. Donner *sans justifier* deux matrices C et D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\|C\| = \|D\| = 1$ et $C \neq D$.

ANNEXE

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____