École supérieure d'informatique, électronique, automatique

2A – Cycle fondamental – Année 2015-2016

esiea
ECOLE D'INGENIEURS
DU MONDE NUMERIQUE

Mathématiques et images : devoir du jeudi 5 novembre

Exercice 1 [11,5 points]

On considère les matrices P et Q ainsi que les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ suivants.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\vec{e}_1) = \dfrac{1}{3}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ et $f(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_3) = \dfrac{2}{3}\vec{e}_1$.

1. Écrire la matrice M de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

2.a. Déterminer une base de Ker M.

2.b. En déduire une valeur propre de M et le sous-espace propre associé.

3.a. Calculer le polynôme caractéristique de M.

3.b. Déterminer alors les autres valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

3.c. Pourquoi peut-on affirmer que M est diagonalisable ?

3.d. Préciser la matrice D vérifiant $M = PDP^{-1}$ où P est définie en début d'énoncé.

4.a. Calculer le produit PQ ; en déduire la valeur de P^{-1}.

4.b. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

5.a. À l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt, orthonormaliser la famille de vecteurs formée par les colonnes de P.

5.b. Déterminer si la base orthonormée obtenue est directe ou indirecte.

5.c. Réécrire la base obtenue sous la forme d'une matrice R ; préciser R et R^{-1}.

5.d. A-t-on également $M^n = RD^nR^{-1}$ pour tout entier naturel n ? Justifier.

Exercice 2 [2 points]

Démontrer que l'inégalité $(a+b+c+d)^2 \leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ est vraie quels que soient les réels a, b, c et d. *On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 3 [6 points]

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ usuel.

1. Donner *sans justifier* une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan d'équation $x + 2y - z = 0$.

2. On note $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique usuelle de $\mathbb{R}^3$. Calculer les six produits scalaires suivants.

$$\vec{\imath} \cdot \vec{u} \qquad \vec{\jmath} \cdot \vec{u} \qquad \vec{k} \cdot \vec{u} \qquad \vec{\imath} \cdot \vec{v} \qquad \vec{\jmath} \cdot \vec{v} \qquad \vec{k} \cdot \vec{v}$$

3. On désigne par f la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 4 [3 points]

On se place dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles. On introduit deux produits scalaires φ et ψ définis quels que soient les réels x, y, z, x', y' et z' par les égalités suivantes.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' + yy' + zz' \qquad \psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = (x+y)x' + (x+3y)y' + 3zz'$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sont dits φ-orthogonaux lorsque $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = 0$; ils sont dits ψ-orthogonaux lorsque $\psi(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

La φ-norme associée au produit scalaire φ est définie pour tout $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ par $\|\vec{u}\|_\varphi = \sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})}$. Un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ est alors dit φ-unitaire lorsque $\|\vec{u}\|_\varphi = 1$.

La ψ-norme associée au produit scalaire ψ est définie pour tout $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ par $\|\vec{u}\|_\psi = \sqrt{\psi(\vec{u},\vec{u})}$. Un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ est alors dit ψ-unitaire lorsque $\|\vec{u}\|_\psi = 1$.

Les définitions précédentes permettent de donner un sens aux notions de famille φ-orthogonale, de famille ψ-orthogonale, de famille φ-orthonormée et de famille ψ-orthonormée.

Déterminer *sans justifier* si chacune des affirmations suivantes est VRAIE ou FAUSSE en cochant la case correspondante. Une réponse correcte apporte 0,25 point ; une réponse incorrecte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Les affirmations se rapportent aux cinq vecteurs suivants.

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

	VRAI	FAUX
1. Le vecteur $\vec{u}_1$ est φ-unitaire.	☐	☐
2. La ψ-norme du vecteur $\vec{u}_2$ est égale à 1.	☐	☐
3. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est ψ-orthogonale.	☐	☐
4. On a l'égalité $\psi(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = 1$.	☐	☐
5. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est ψ-orthonormée.	☐	☐
6. Le vecteur $\vec{u}_5$ est ψ-unitaire.	☐	☐
7. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est φ-orthogonale.	☐	☐
8. On a l'égalité $\varphi(\vec{u}_5, \vec{u}_3) = \psi(\vec{u}_3, \vec{u}_5)$.	☐	☐
9. Les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont φ-orthogonaux.	☐	☐
10. La φ-norme du vecteur $\vec{u}_2$ est égale à 5.	☐	☐
11. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est φ-orthogonale.	☐	☐
12. On a l'égalité $\varphi(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = -1$.	☐	☐