Éléments de correction

devoir du vendredi 11 décembre

Exercice 1

1.a. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice M canoniquement associée à l'application f vérifie donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

1.b. Le polynôme caractéristique de M est le polynôme χ_M défini par :

$$\underline{\chi_M = \det(M - x I_3)}$$

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} - x & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1-x & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} - x \end{pmatrix}$$

En développant suivant la <u>deuxième</u> ligne, On obtient :

$$\chi_M = (1-X) \det \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} - X & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - X \end{pmatrix}$$

$$\chi_M = (1-X)\left(-\frac{9}{25} + \frac{3}{5}X - \frac{3}{5}X + X^2 - \frac{16}{25}\right)$$

$$\chi_M = (1-X)(X^2-1)$$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\chi_M = -(X-1)^2(X+1).}$

1.c. Les <u>valeurs propres</u> de M sont exactement les <u>racines</u> de χ_M. On en déduit que M admet exactement deux valeurs propres :

- <u>le réel 1, valeur propre double ;</u>
- <u>le réel −1, valeur propre simple.</u>

2.a. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3x + 4z = 5x \\ 5y = 5y \\ 4x + 3z = 5z \end{cases}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 8x = 4z \\ 2z = 4x \end{cases}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff 2x - z = 0$$

<u>Ce qu'il fallait démontrer :</u>

$$\left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{u}) = \vec{u} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ 2x - z = 0 \right\}$$

2.b. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ appartiennent au plan d'équation $2x - z = 0$ car <u>leurs coordonnées vérifient l'équation du plan</u>.

On a d'autre part $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$ ainsi que $\underline{\|\vec{a}\| = 1}$ et $\underline{\|\vec{b}\| = 1}$.

Enfin, la famille <u>$(\vec{a}, \vec{b})$ est libre</u>

donc $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base du plan d'équation $2x - z = 0$.

<u>Ce qu'il fallait démontrer.</u>

2.c. On a $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

D'où $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

D'où $\boxed{\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

2.d. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4z = -5x \\ 5y = -5y \\ 4x + 3z = -5z \end{cases}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ y = 0 \\ 4x + 8z = 0 \end{cases}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

D'où $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a $\underline{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\, \vec{c} = \mathbb{R}\vec{c}}$ donc

on peut affirmer :

$$\boxed{\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{u}) = -\vec{u}\} = \mathbb{R}\vec{c}}$$

3. On a démontré que les valeurs propres de M sont 1 et -1 ; d'autre part, les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont respectivement E_1 et E_{-1} avec :

$$\underline{E_1 = \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}} \quad \text{et} \quad \underline{E_{-1} = \mathbb{R}\vec{c}}$$

La dimension de chacun des sous-espaces propres est égale à la multiplicité de la valeur propre associée donc M est diagonalisable.

De plus, la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ d'après les questions 2.b et 2.c.

On peut donc affirmer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de M, ce qui montre que M est orthodiagonalisable.

On peut écrire $M = PDP^{-1}$ avec P matrice orthogonale et D matrice diagonale, ainsi que $P^{-1} = {}^tP$:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

4. La forme de D prouve que <u>f est une symétrie orthogonale</u> <u>par rapport au plan d'équation $2x - z = 0$.</u>

5. a. La deuxième coordonnée des vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ <u>est nulle</u> donc les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ appartiennent au plan Π.

5. b. D'après la nature de s et comme <u>$\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont éléments de Π</u>, on a :

$$\underline{s(\vec{b}) = \vec{b} \quad \text{et} \quad s(\vec{c}) = \vec{c}}$$

Le vecteur $\vec{a}$ est orthogonal à Π donc on a <u>$s(\vec{a}) = -\vec{a}$</u>.

La matrice de s dans $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est donc :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.c. le produit matriciel

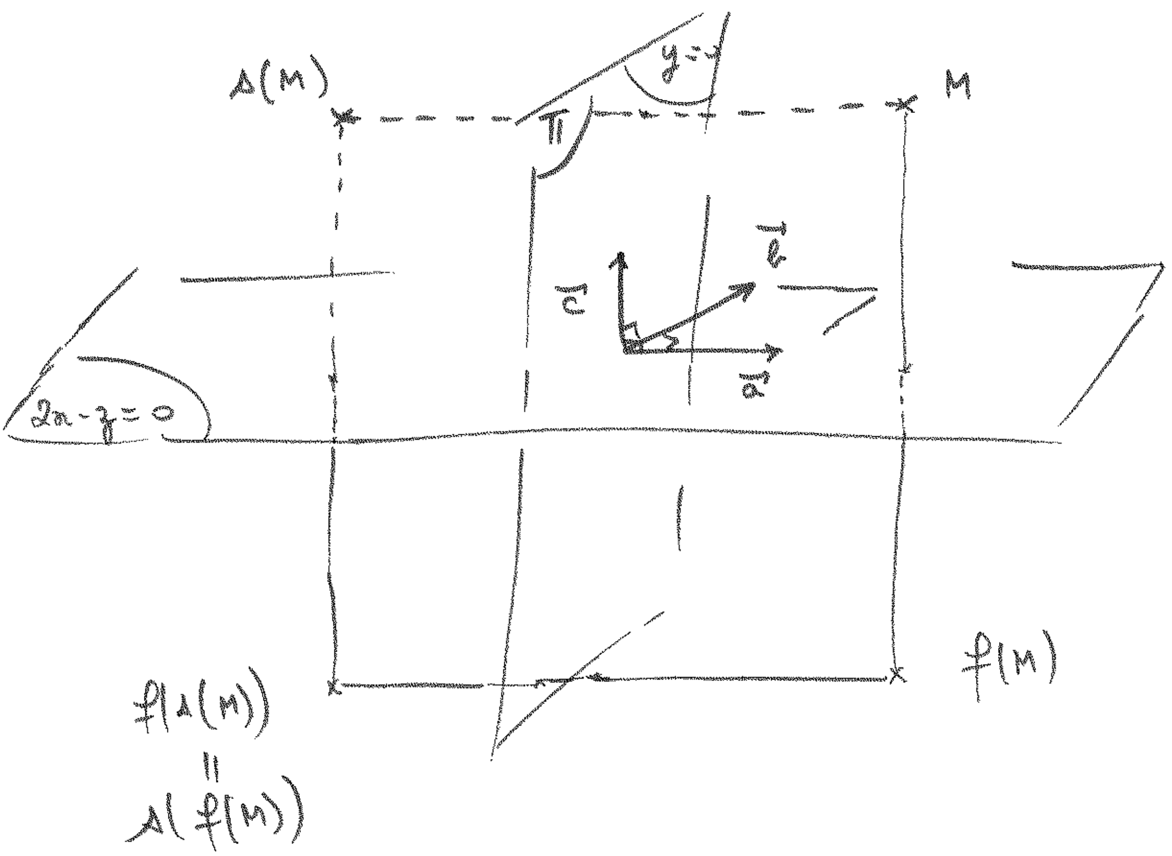
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est <u>commutatif</u>.

On en déduit que <u>$f \circ s = s \circ f$</u> et que l'application $f \circ s$ est la <u>symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}\vec{b}$</u> car

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>schéma</u>



Exercice 3

1. a. On suppose qu'il existe M dans $\mathbb{R}^3$ tel que $g(M) = M$. Alors il existe trois réels x, y et z tels que :

$$\begin{cases} z-1 = x \\ x+2 = y \\ y = z \end{cases}$$

donc tels que : $\begin{cases} z = x+1 \\ y = x+2 \\ z = x+2 \end{cases}$

On en déduit $x+1 = x+2$, d'où $1 = 2$, ce qui est absurde. Ce qu'il fallait démontrer.

1. b. Si g était linéaire, on aurait $g(\vec{0}) = \vec{0}$, ce qui n'est pas le cas car $g(\vec{0}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'application g n'est donc pas linéaire.

2. a. On pose

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

On remarque alors :

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{\underline{g(X) = AX + B}}$$

2.b. On remarque : $\underline{A \times {}^tA = {}^tA \times A = I_3}$.

Cela prouve que $\underline{A \text{ est une matrice orthogonale}}$.

2.c. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases}$$

D'où $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = y = z$

On peut donc affirmer :

$$\boxed{\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3, \ A\vec{u} = \vec{u}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

On peut poser $\underline{\underline{\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$.

2.d. On peut poser :

$$\underline{\underline{\vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\vec{u_3} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

3. a. • D'après la question 2.c., on peut affirmer :

$$\underline{\underline{h(\vec{u_1}) = \vec{u_1}}}$$

• On a aussi :

$$h(\vec{u_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{par calcul direct}$$

$$h(\vec{u_3}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{par calcul direct}$$

On cherche les <u>réels α, β, γ et δ</u> vérifiant :

$$\begin{cases} h(\vec{u_2}) = \alpha \vec{u_2} + \beta \vec{u_3} \\ h(\vec{u_3}) = \gamma \vec{u_2} + \delta \vec{u_3} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ 1 = -\alpha + \beta \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ -1 = -2\beta \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -2 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\gamma + \delta \\ 1 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\gamma + \delta \\ 1 = -2\delta \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \delta = -\frac{1}{2}$$

<u>Conclusion :</u>

$$\left\| \begin{aligned} h(\vec{u_1}) &= 1\,\vec{u_1} + 0\,\vec{u_2} + 0\,\vec{u_3} \\ h(\vec{u_2}) &= 0\,\vec{u_1} - \frac{1}{2}\,\vec{u_2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{u_3} \\ h(\vec{u_3}) &= 0\,\vec{u_1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{u_2} - \frac{1}{2}\,\vec{u_3} \end{aligned} \right.$$

3.b. Il suffit de <u>lire les égalités précédentes</u> pour déterminer la matrice demandée :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

3.c. La matrice précédente s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

On en déduit que <u>h est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de la droite $\mathbb{R}\vec{u_1}$ orientée par $\vec{u_1}$</u>.

4. L'application <u>h est la partie linéaire de l'application g</u>. L'application <u>g est affine</u> ; c'est un <u>vissage de $\mathbb{R}^3$</u>, <u>composée</u> commutative d'une <u>translation</u> et d'une <u>rotation</u>.

<u>Exercice 2</u> : <u>voir l'annexe</u>.

<u>Exercice 4</u>

On obtient :

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

<u>Exercice 5</u>

On obtient :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : — CORRECTION —