Mathématiques et image

Devoir du jeudi 5 novembre

Exercice 1

1. On a $\boxed{\mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

2.a. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, M \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = -y \end{cases}$$

D'où $\boxed{\mathrm{Ker}\, M = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

2.b. Le réel <u>0 est valeur propre</u> de M.

Le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.a. On a $\chi_M = \det\begin{pmatrix} -x & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -x & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -x \end{pmatrix}$

On développe suivant la <u>troisième ligne</u> :

$$\chi_M = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -x & 0 \end{pmatrix} - x \det\begin{pmatrix} -x & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -x \end{pmatrix}$$

$$\chi_M = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x\right) - x\left(x^2 - \frac{2}{9}\right)$$

$$\chi_M = x\left(\frac{2}{9} - x^2 + \frac{2}{9}\right)$$

$$\chi_M = -x\left(x^2 - \frac{4}{9}\right)$$

$$\boxed{\chi_M = -x\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)}$$

3.b. On peut affirmer : $\boxed{sp\, M = \left\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}}$

Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\frac{2}{3}} \iff \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + z \\ x = 2y \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ y = y \\ z = y \end{cases} \quad \text{D'où } \boxed{E_{\frac{2}{3}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\frac{2}{3}} \iff \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = -\frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x = -\frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x = -\frac{2}{3}z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = -2y \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = y \end{cases} \quad \text{D'où } \boxed{E_{-\frac{2}{3}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

3.c. La matrice M admet trois valeurs propres simples or la dimension de chacun des espaces propres associé vaut 1.

3.d. On a $\boxed{D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

4.a. On a $PQ = 4I_3$ d'où $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$

4.b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(\cdot)$ le prédicat « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai car $M^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $PD^nP^{-1} = M^n$.

  Alors $(PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = M \times M^n$

  car $PDP^{-1} = M$ (qu. 3.d.)

  et après multiplication à gauche.

  D'où $PD^{n+1}P^{-1} = M^{n+1}$

- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

5.a. On cherche à orthonormaliser la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

- On pose $\vec{a} = \dfrac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  On a donc $\boxed{\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- On cherche $\vec{b'}$ tel que :

  $$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} \right) \vec{a} + \vec{b'}$$

  il vient $\vec{b'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $$\vec{b'} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  On pose $\vec{b} = \dfrac{1}{\|\vec{b'}\|} \vec{b'}$

  Il vient $\boxed{\vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

  puisque $\|\vec{b'}\| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

• On cherche $\vec{c}'$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} \right) \vec{a} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{b} \right) \vec{b} + \vec{c}'$$

il vient $\vec{c}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{0} - \vec{0}$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On pose $\vec{c} = \dfrac{1}{\|\vec{c}'\|} \vec{c}'$

Il vient $\boxed{\vec{c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

puisque $\|\vec{c}'\| = \sqrt{2}$

La famille obtenue est

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

5.b. On calcule le produit mixte $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -1}$$

La base orthonormée obtenue est donc <u>indirecte</u>

5. c. On peut écrire

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On a alors $\underline{\underline{R^{-1} = {}^tR}}$ car R est

une <u>matrice orthogonale</u>.

5.d. Si la proposition indiquée était vraie, on aurait $MR = RD$ or on remarque :

- $$MR = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$MR = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

- $$RD = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$RD = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

On a $RD \neq MR$ donc la proposition $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = RD^nR^{-1}$ est donc fausse.

Exercice 2

On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, où les réels a, b, c et d sont quelconques. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$$

On a donc :

$$(a + b + c + d)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \times 4.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3

1. On remarque que les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

sont deux vecteurs non colinéaires qui appartiennent au plan d'équation $x+2y-z=0$.

De plus, on a $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$, ce qui montre que ces deux vecteurs sont orthogonaux. Il suffit de les rendre unitaires pour obtenir une base orthonormée du plan voulu. On a donc :

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right)}$$ est une base orthonormée du plan d'équation $x+2y-z=0$. On pose $\boxed{\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}$

2. Les <u>résultats</u> sont les suivants :

$$\left\| \begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vec{j} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\| \begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{v} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vec{k} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right.$$

3. Par <u>définition</u> de f, on a :

- $f(\vec{i}) = (\vec{i} \cdot \vec{u})\, \vec{u} + (\vec{i} \cdot \vec{v})\, \vec{v}$

$$f(\vec{i}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{f(\vec{i}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

- $f(\vec{j}) = (\vec{j} \cdot \vec{u})\, \vec{u} + (\vec{j} \cdot \vec{v})\, \vec{v}$

$$f(\vec{j}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $$f(\vec{k}) = (\vec{k}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{k}\cdot\vec{v})\,\vec{v}$$

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(f) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$$