École supérieure d'informatique, électronique, automatique

**2A – Cycle fondamental – Année 2015-2016**

Mathématiques et images : devoir du vendredi 11 décembre

## Exercice 1 [11 points]

Dans l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, on considère l'application linéaire $f$ définie quels que soient les réels $x$, $y$ et $z$ par l'égalité suivante, ainsi que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ définis ci-après.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x+4z \\ 5y \\ 4x+3z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**1.a.** Préciser la matrice $M$ canoniquement associée à l'application $f$.

**1.b.** Calculer le polynôme caractéristique de $M$.

**1.c.** En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M$ ; préciser les multiplicités associées.

**2.a.** On rappelle qu'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ est dit *invariant* par $f$ lorsque $f(\vec{u}) = \vec{u}$. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $f$ est le plan d'équation $2x - z = 0$.

**2.b.** Montrer que la famille $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base orthonormée du plan d'équation $2x - z = 0$.

**2.c.** On pose $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$. Calculer $\vec{c}$.

**2.d.** Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'égalité $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ est la droite $\mathbb{R}\vec{c}$.

**3.** À l'aide des questions précédentes, montrer que l'application $f$ est *orthodiagonalisable*, c'est-à-dire diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Préciser tous les termes des matrices $D$, $P$ et $P^{-1}$ vérifiant $M = PDP^{-1}$.

**4.** Donner la nature géométrique de $f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

On introduit le plan $\Pi$ d'équation $y = 0$ et on désigne par $s$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\Pi$.

**5.a.** Vérifier que les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ appartiennent à $\Pi$.

**5.b.** Déterminer la matrice de l'application $s$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

**5.c.** Quelle est la nature géométrique de la composée $f \circ s$ ? Les applications $f$ et $s$ commutent-elles ? Faire un schéma qualitatif décrivant la situation. *On ne cherchera pas à représenter exactement les objets mathématiques en présence.*

## Exercice 2 [1,5 points]

Sur l'annexe sont représentées trois plaques de métal parfaitement homogènes. Construire les centres de gravité respectifs $G_1$, $G_2$ et $G_3$ de ces trois plaques. *Aucune justification n'est attendue. On laissera apparents les traits de construction utilisés.*

**Exercice 3 [7 points]**

Dans l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle d'espace affine, on considère l'application $g$ définie quels que soient les réels $x$, $y$ et $z$ par l'égalité suivante.

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 \\ x+2 \\ y \end{pmatrix}$$

**1.a.** Montrer qu'il n'existe aucun point $M$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g(M) = M$.

**1.b.** L'application $g$ est-elle linéaire ? Justifier.

**2.a.** Déterminer $A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B$ dans $\mathbb{R}^3$ afin que l'égalité $g(X) = AX + B$ soit vraie pour tout $X$ de $\mathbb{R}^3$.

**2.b.** La matrice $A$ déterminée ci-dessus est-elle orthogonale ? Justifier.

**2.c.** Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $A\vec{u} = \vec{u}$ est une droite vectorielle ; préciser un vecteur unitaire $\vec{u}_1$ dirigeant cette droite.

**2.d.** Donner *sans justifier* deux vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ de $\mathbb{R}^3$ définis de façon à ce que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

**3.a.** On note $h$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A$. Exprimer les vecteurs $h(\vec{u}_1)$, $h(\vec{u}_2)$ et $h(\vec{u}_3)$ en fonction des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

**3.b.** En déduire la matrice de $h$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

**3.c.** Donner la nature géométrique de $h$ et préciser ses éléments caractéristiques.

**4.** Quel lien unit les applications $g$ et $h$ ? Comment qualifie-t-on l'application $g$ ? Quelle est la nature géométrique de $g$ ?

**Exercice 4 [1,5 points]**

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure usuelle d'espace affine, on considère les points suivants.

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On définit également les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y - 1 = 0$,
- $\mathscr{D}_2$ est la droite passant par $I$ et $J$,
- $\mathscr{D}_3$ est la droite parallèle à $\mathscr{D}_2$ passant par $K$.

Pour tout $i$ de $\{1, 2, 3\}$, écrire $\mathscr{D}_i$ sous la forme $\mathscr{D}_i = M_i + \mathbb{R}\vec{v}_i$, où $M_i$ est un point de $\mathbb{R}^2$ à préciser et $\vec{v}_i$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ à préciser. *Aucune justification n'est attendue.*

**Exercice 5 [1,5 points]**

Soit $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ les ensembles définis par les égalités suivantes. Montrer que chacun de ces ensembles est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ en précisant un point de ce sous-espace ainsi que sa direction. *Aucune justification n'est attendue.*

$$\mathscr{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3x+1 \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \mathscr{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 1 \right\} \quad \mathscr{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ y = x \right\}$$

**ANNEXE**
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ______________________________