ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

2A – Cycle fondamental – Année 2015-2016

MATHÉMATIQUES ET IMAGES : DEVOIR DE RÉVISIONS DU MARDI 8 DÉCEMBRE

Exercice 1 [3 points]

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure usuelle d'espace affine, on considère les points suivants.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On définit également les droites suivantes :
- $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y - 1 = 0$,
- $\mathscr{D}_2$ est la droite passant par A et B,
- $\mathscr{D}_3$ est la droite parallèle à $\mathscr{D}_2$ passant par C.

Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, écrire $\mathscr{D}_i$ sous la forme $\mathscr{D}_i = M_i + \mathbb{R}\vec{u}_i$, où M_i est un point de $\mathbb{R}^2$ à préciser et $\vec{u}_i$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ à préciser. *Aucune justification n'est attendue.*

Exercice 2 [4 points]

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini pour tous réels x_1, x_2, x_3 et x_4 par l'égalité suivante. On introduit également le vecteur $\vec{a}$ défini comme ci-dessous.

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $E = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^4,\ g(\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ de E.

2.a. Le vecteur $\vec{a}$ appartient-il à $\mathcal{V}\mathrm{ect}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$? Justifier.

2.b. En déduire *sans calcul* que la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3.a. Donner la matrice de g dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. *Aucune justification n'est attendue.*

3.b. En déduire la nature géométrique de g et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 [3 points]

Sur l'**ANNEXE** sont représentés trois points F, G et H. Construire *sans justifier* les points I, J et K définis par les égalités barycentriques suivantes.

$$I = \mathrm{bar}\,\{(F, 2), (G, 1), (H, 1)\} \qquad J = \mathrm{bar}\,\{(F, 1), (G, 2)\} \qquad K = \mathrm{bar}\,\{(F, 2), (G, 1), (H, 3)\}$$

Problème [12 points]

On désigne par a, b et c trois réels quelconques. On introduit la matrice $M(a,b,c)$ définie ci-après, ainsi que l'endomorphisme $f_{a,b,c}$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M(a,b,c)$.

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$. On note D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ orthogonale à P. On considère enfin les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : généralités

1.1.a. Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigeant la droite D.

1.1.b. Montrer que $\vec{v}$ est un vecteur unitaire appartenant au plan P.

1.1.c. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ de manière à ce que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

1.2. Calculer $f_{a,b,c}(\vec{u})$ et en déduire une valeur propre de $f_{a,b,c}$.

1.3.a. Démontrer que $(\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée de P.

1.3.b. Montrer que l'image du plan P par $f_{a,b,c}$ est incluse dans le plan P.

Partie 2 : cas particulier d'une rotation

On note $R = M(a,b,c)$ et $r = f_{a,b,c}$ dans le cas particulier où $(a,b,c) = (0,1,0)$.

2.1. Montrer que r est un endomorphisme orthogonal.

2.2. Calculer le polynôme caractéristique de R et en déduire les valeurs propres réelles de R. La matrice R est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Justifier.

2.3. Montrer que r est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques.

Partie 3 : cas particulier d'une symétrie

On note $S = M(a,b,c)$ et $s = f_{a,b,c}$ dans le cas particulier où $(a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

3.1. Calculer S^2.

3.2. Expliciter les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

3.3. Donner la nature géométrique de s et préciser ses éléments caractéristiques.

Partie 4 : cas particulier d'une projection

On note $P = M(a,b,c)$ et $p = f_{a,b,c}$ dans le cas particulier où $(a,b,c) = \frac{1}{3}(1,1,1)$.

4.1. La matrice P est-elle inversible ? Justifier.

4.2. Calculer le polynôme caractéristique de P.

4.3. Donner la nature géométrique de p et préciser ses éléments caractéristiques.

ANNEXE

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____