ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

2A – Cycle fondamental – Année 2015-2016

ECOLE D'INGENIEURS DU MONDE NUMERIQUE

MATHÉMATIQUES ET IMAGES : DEVOIR DU VENDREDI 9 OCTOBRE

Prénom NOM : ______________________________

Ce devoir comporte vingt-quatre questions **indépendantes**. À chaque question, cinq affirmations sont énoncées, parmi lesquelles **zéro, une ou plusieurs** peuvent être vraies. **Noircir soigneusement** les cases qui correspondent aux affirmations vraies.

Aucune justification n'est attendue ; **seul un stylo est autorisé.** Une réponse correcte **apporte** un point et une réponse incorrecte **enlève** un point ; l'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Un éventuel total négatif pour une question sera ramené à 0.

Question 1	■	■	■	■	■
Question 2	■	B	C	■	■
Question 3	■	■	■	D	E
Question 4	■	■	■	■	■
Question 5	A	■	■	D	E
Question 6	■	B	■	D	E
Question 7	■	B	C	■	■
Question 8	A	B	C	D	■
Question 9	■	B	■	■	E
Question 10	■	■	C	■	■
Question 11	A	B	■	■	■
Question 12	■	■	■	D	■
Question 13	A	■	■	■	■
Question 14	A	B	■	D	E
Question 15	■	B	■	D	E
Question 16	■	■	■	D	E
Question 17	■	■	C	■	■
Question 18	A	B	■	D	■
Question 19	■	B	■	■	E
Question 20	A	■	C	D	■
Question 21	A	■	C	D	■
Question 22	A	■	C	■	E
Question 23	■	■	■	■	■
Question 24	■	■	C	■	E

Question 1

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

■ La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

■ Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{w}$ est nul.

■ La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

■ La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthogonale.

■ La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormale.

Question 2

On considère un espace vectoriel E de dimension 5 muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $\vec{u}$ dans E ; on note X les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$ et on note X' les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}'$, en convenant que X et X' sont des éléments de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

■ Si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a l'égalité $X' = P^{-1}X$.

B Si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a l'égalité $X = P^{-1}X'$.

C Si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a l'égalité $X' = PX$.

■ Si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

■ Si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a l'égalité $X = PX'$.

Question 3

On considère une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est égal $X(X-1)^3$.

■ Le réel 0 est une valeur propre de M.

■ Le réel 1 est une valeur propre de M.

■ Le réel 0 est une valeur propre simple de M.

D Le réel 1 est une valeur propre simple de M.

E Le réel 1 est une valeur propre double de M.

Question 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ 3x+3y+4z \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

[redacted] Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2.

[redacted] L'endomorphisme f est diagonalisable.

[redacted] Le spectre de f est égal à $\{1, 3\}$.

[redacted] L'ensemble $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

[redacted] Le polynôme caractéristique de f est égal à $-(X-3)(X-1)^2$.

Question 5

On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[A] La matrice D est la matrice d'une symétrie.

[redacted] La matrice $C + D$ est une matrice diagonale.

[redacted] Le polynôme caractéristique de C vaut $(X+1)^2(X-1)^2$.

[D] La matrice C est la matrice d'une projection.

[E] Le polynôme caractéristique de D vaut $(X-1)^3$.

Question 6

On pose $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

[redacted] Le vecteur $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ est un vecteur propre de f.

[B] La matrice de l'application f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[redacted] Le vecteur $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ est un vecteur propre de f.

[D] La matrice de l'application f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[E] Les vecteurs propres de f sont orthogonaux.

Question 7

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ usuel, on pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

■ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

B La norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à 0.

C La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

■ La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

■ La norme du vecteur $\vec{w}$ est égale à 2.

Question 8

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -256 \end{pmatrix}$.

A L'égalité $B^8 = A$ est vraie.

B L'égalité $8A = B$ est vraie.

C L'égalité $8A = -B$ est vraie.

D L'égalité $A^8 = B$ est vraie.

■ L'égalité $A^8 = -B$ est vraie.

Question 9

Dans $\mathbb{R}^3$, on note P_1 le plan d'équation $x + 2y - z = 0$, P_2 le plan d'équation $-x + y + z = 0$ et P_3 le plan d'équation $2x - 2y - 2z = 0$.

■ On a l'égalité $P_2 \cap P_3 = P_3$.

B On a l'égalité $P_1 \cap P_2 = \{\vec{0}\}$.

■ On a l'égalité $P_2 \cap P_3 = P_2$.

■ Les plans P_1 et P_2 sont orthogonaux.

E Les plans P_1 et P_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Question 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant λ comme valeur propre.

[redacted] Le réel 0 est une valeur propre de la matrice $M - \lambda I_n$.

[redacted] Le réel $\lambda - 1$ est une valeur propre de la matrice $M - I_n$.

C Le réel $\lambda + 1$ est une valeur propre de la matrice $M - I_n$.

[redacted] Le réel λ^2 est une valeur propre de la matrice M^2.

[redacted] Le réel λ^n est une valeur propre de la matrice M^n.

Question 11

On se place dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Que penser des affirmations suivantes ?

A Toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

B Toute matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

[redacted] Toute matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

[redacted] La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

[redacted] La matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Question 12

Dans $\mathbb{R}^3$, on note P le plan d'équation $-2x + y - z = 0$ et on pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

[redacted] Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

[redacted] Le vecteur $\vec{u}$ appartient à P.

[redacted] Le vecteur $\vec{v}$ appartient à P.

D La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormale.

[redacted] La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthogonale.

Question 13

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques d'un espace euclidien E.

[A] Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme.

■ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ ont la même norme.

■ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

■ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est nul.

■ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Question 14

Soit x un réel quelconque. On pose $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix}$.

[A] Le déterminant de la matrice A est égal à $2x-4$.

[B] Le déterminant de la matrice A est égal à x^2+4.

■ Le déterminant de la matrice A est égal à x^2-4.

[D] Le déterminant de la matrice A est égal à $2x+4$.

[E] Le déterminant de la matrice A est égal à $-x^2+4$.

Question 15

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

■ Le polynôme caractéristique de la matrice A vaut $-X^3-1$.

[B] Le polynôme caractéristique de la matrice A vaut $-X^3-X-1$.

■ Le polynôme caractéristique de la matrice A vaut $-(X+1)(X^2-X+1)$.

[D] La matrice A admet trois valeurs propres réelles.

[E] La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Question 16

Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

■ La matrice M admet au moins une valeur propre réelle.

■ La matrice M admet une infinité de vecteurs propres.

■ Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de M, alors $-2\vec{u}$ est un vecteur propre de M.

D Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs propres de M, alors $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur propre de M.

E Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs propres de M, alors $3\vec{u}-2\vec{v}$ est un vecteur propre de M.

Question 17

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E. On suppose qu'il existe trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans E vérifiant les égalités $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$, $f(\vec{v}) = 2\vec{v}$ et $f(\vec{w}) = \vec{0}$.

■ Le réel 0 est une valeur propre de f.

■ Le réel 2 est une valeur propre de f.

C Le vecteur $\vec{0}$ est un vecteur propre de f.

■ Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur propre de f.

■ Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur propre de f.

Question 18

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

A Les sous-espaces vectoriels Ker A et Im A sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

B Le sous-espace vectoriel Im A est de dimension 1.

■ Le sous-espace vectoriel Im A est de dimension 2.

D Le sous-espace vectoriel Ker A est de dimension 2.

■ Le sous-espace vectoriel Ker A est de dimension 1.

Question 19

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques d'un espace euclidien E.

■ L'inégalité $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ est vraie.

B L'égalité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ est vraie.

■ L'inégalité $\vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ est vraie.

■ L'égalité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ est vraie.

E L'égalité $\|-3\vec{u}\| = -3\|\vec{u}\|$ est vraie.

Question 20

On pose $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

A La famille $(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

■ La famille $(\vec{b},\vec{c})$ est une famille liée.

C La famille $(\vec{b},\vec{c})$ est une famille libre.

D Le vecteur $\vec{a}+\vec{d}$ appartient à $\mathcal{V}\mathrm{ect}(\vec{b},\vec{c})$.

■ La famille $(\vec{a},\vec{b})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Question 21

On note A la matrice définie par l'égalité $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

A Le réel -1 est une valeur propre de A.

■ Le réel 0 est une valeur propre de A.

C Les colonnes de A forment des vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^3$.

D Le déterminant de $A + I_3$ est nul.

■ Le déterminant de $A - I_3$ est nul.

Question 22

On note f l'application définie pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

- A L'application f est une dilatation.
- ■ L'application f est une symétrie.
- C Le polynôme caractéristique de f est égal à $X^2 + 1$.
- ■ Le polynôme caractéristique de f est égal à $X^2 - 1$.
- E L'application f est une projection.

Question 23

On pose $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ■ La famille $(\vec{a}, \vec{b})$ est orthogonale.
- ■ La famille $(\vec{a}, \vec{b})$ est libre.
- ■ On a $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$.
- ■ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.
- ■ La famille $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Question 24

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ainsi que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ■ Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur propre de A.
- ■ Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de A.
- C Le déterminant de A est égal à 34.
- ■ Le déterminant de A est égal à 32.
- E Le déterminant de A est égal à 36.