École supérieure d'informatique, électronique, automatique

1A – Cycle de transition – Année 2014-2015

Suites et fonctions : examen du mercredi 21 janvier

Durée de l'épreuve : 90 minutes

*L'examen comporte **trois exercices**. Documents et calculatrices sont **interdits**.*
La qualité de la rédaction et la présentation entreront dans l'appréciation des copies.
L'intégralité du sujet devra être rendue avec la copie.

Exercice 1 [6,5 points]

On considère la fonction g définie pour tout réel x de $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $g(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$.
On pose $u_0=2$ et $u_{n+1}=g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2.a. Démontrer la proposition : $\forall x\in[1\,;+\infty[,\ g(x)\geqslant 1$.

2.b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $u_n\geqslant 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3.a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n=\ln\left(\dfrac{-1+u_n}{u_n}\right)$ est géométrique de raison 2, puis exprimer v_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

3.b. En déduire que, quel que soit n dans $\mathbb{N}$, l'égalité $u_n=\dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}$ est vraie.

3.c. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.d. Que penser de la *rapidité de convergence* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers sa limite ?

Exercice 2 [6 points]

Pour chacune des affirmations figurant sur l'**annexe**, déterminer *sans justifier* si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Une réponse correcte apporte 0,5 point ; une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. En cas de total négatif à l'exercice, celui-ci sera ramené à 0.

Exercice 3 [8,5 points]

Soit f la fonction définie pour tout x de $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & \text{si } x>0.\end{cases}$

1. Justifier l'égalité $\displaystyle\lim_{X\to 0}\left(\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=1$; en déduire la limite de f en $+\infty$.

2. La fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ? Justifier.

3.a. Pour x dans $]0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et vérifier que l'égalité $f''(x)=\dfrac{-4}{x(x+2)^2}$ est vraie.

3.b. Quel est le sens de variation de la fonction f' ? Justifier.

3.c. Trouver la limite de f' en $+\infty$ et en déduire le signe de f'.

4.a. Dresser le tableau de variation complet de f.

4.b. Combien y a-t-il de réels x, éléments de $[0\,;+\infty[$, vérifiant l'égalité $f(x)=1$? Justifier.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ______________________________

	VRAI	FAUX
1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$ diverge vers $+\infty$.	☐	☐
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -4 + 2u_n$ converge vers le réel 4.	☐	☐
3. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x + \lvert x\rvert$ est dérivable en 0.	☐	☐
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels adjacentes, alors elles convergent vers un même réel ℓ.	☐	☐
5. La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.	☐	☐
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = (-3)^n$ est monotone.	☐	☐
7. Pour n au voisinage de $+\infty$, on a la relation $\sqrt{2n^2+1} \sim 2n$.	☐	☐
8. Si f est une fonction définie sur $[1\,;3]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(1)\times f(3) < 0$, alors f s'annule.	☐	☐
9. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels géométrique et de raison strictement négative, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.	☐	☐
10. L'ensemble de définition de la fonction arctan est $[-1\,;1]$.	☐	☐
11. Si f est une application définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée.	☐	☐
12. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels à la fois bornée et décroissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.	☐	☐