



MATHÉMATIQUES ET IMAGES : DEVOIR POUR LE MERCREDI 30 SEPTEMBRE

Exercice 1

Soit f l'application définie pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - y \\ z - x \\ 2z - x - y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est linéaire.

On note F l'ensemble des vecteurs *invariants* par f , c'est-à-dire l'ensemble des éléments \vec{u} de \mathbb{R}^3 vérifiant $f(\vec{u}) = \vec{u}$. Par ailleurs, on pose $G = \text{Ker } f$.

2.a. Expliciter F et montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ; en préciser une base.

2.b. Reprendre la question précédente pour G .

3. Montrer que les vecteurs utilisés pour la base de F et la base de G permettent de former une base de \mathbb{R}^3 , que l'on notera $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

4.a. Exprimer $f(\vec{b}_1)$, $f(\vec{b}_2)$ et $f(\vec{b}_3)$ en fonction de \vec{b}_1 , \vec{b}_2 et \vec{b}_3 .

4.b. En déduire, pour X, Y et Z trois réels quelconques, l'expression de $f(X\vec{b}_1 + Y\vec{b}_2 + Z\vec{b}_3)$ en fonction de $X, Y, Z, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ et \vec{b}_3 .

5. Quelle transformation géométrique de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 représente la fonction f ?

Exercice 2

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les quatre vecteurs suivants.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner les coordonnées de \vec{c} dans cette base.

2. Dans \mathbb{R}^3 , la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est-elle libre? liée? Justifier.

Exercice 3

Dans \mathbb{R}^3 , on définit trois vecteurs \vec{u}_1, \vec{u}_2 et \vec{u}_3 de la manière suivante.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On considère également l'ensemble F défini par $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

1.a. Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée.

1.b. Quelle est une équation cartésienne de F ? Justifier.

2.a. Donner un sous-espace vectoriel G différent de $\{\vec{0}\}$ tel que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

2.b. Écrire tout vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^3 sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec \vec{v} dans F et \vec{w} dans G .