ESIEA – ÉCOLE D'INGÉNIEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

1A – Cycle de transition – Année 2016-2017

RENFORCEMENT NUMÉRIQUE : DEVOIR DU JEUDI 15 DÉCEMBRE

Exercice 1 [9 points]

Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f, par $\mathscr{C}_g$ celle de g. Soit $I_f = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_g = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

1.a. Calculer la dérivée f' de la fonction f et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

1.b. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales D_1 et D_2 ; préciser leurs équations.

1.c. Déterminer une équation de la tangente T_f à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2.a. Que vaut $I_f + I_g$? *On utilisera la linéarité de l'intégrale.*

2.b. Déterminer une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2.c. En déduire la valeur exacte de I_g puis la valeur exacte de I_f.

3. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4.a. Montrer que l'égalité $g(x) = f(-x)$ est vraie quel que soit le réel x.

4.b. En déduire que $\mathscr{C}_g$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par une symétrie que l'on déterminera.

5. Sur l'**ANNEXE 1**, réaliser le tracé de D_1 et D_2, de la tangente T_f et des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Colorier la partie du plan dont l'aire est égale à I_f et la partie du plan dont l'aire est égale à I_g.

Exercice 2 [3 points]

Sur l'**ANNEXE 2**, relier *sans justifier* une intégrale de la colonne de gauche à sa valeur dans la colonne de droite. À droite comme à gauche, chaque élément peut servir une ou plusieurs fois... ou ne pas être utilisé du tout !

Une réponse correcte apporte 0,5 point ; une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Un éventuel total négatif sera ramené à 0.

Exercice 3 [6 points]

On considère l'application φ définie pour tout réel strictement positif t par $\varphi(t) = t^2 - 2\ln t$.

1. Dresser le tableau de variations de φ le plus complet possible ; en déduire que l'inégalité $\varphi(t) \geqslant 1$ est vraie quel que soit t dans $]0, +\infty[$.

2. L'application φ est-elle concave ? convexe ? Justifier.

3. Déterminer toutes les primitives de φ sur $]0, +\infty[$ puis préciser celle qui s'annule en 1.

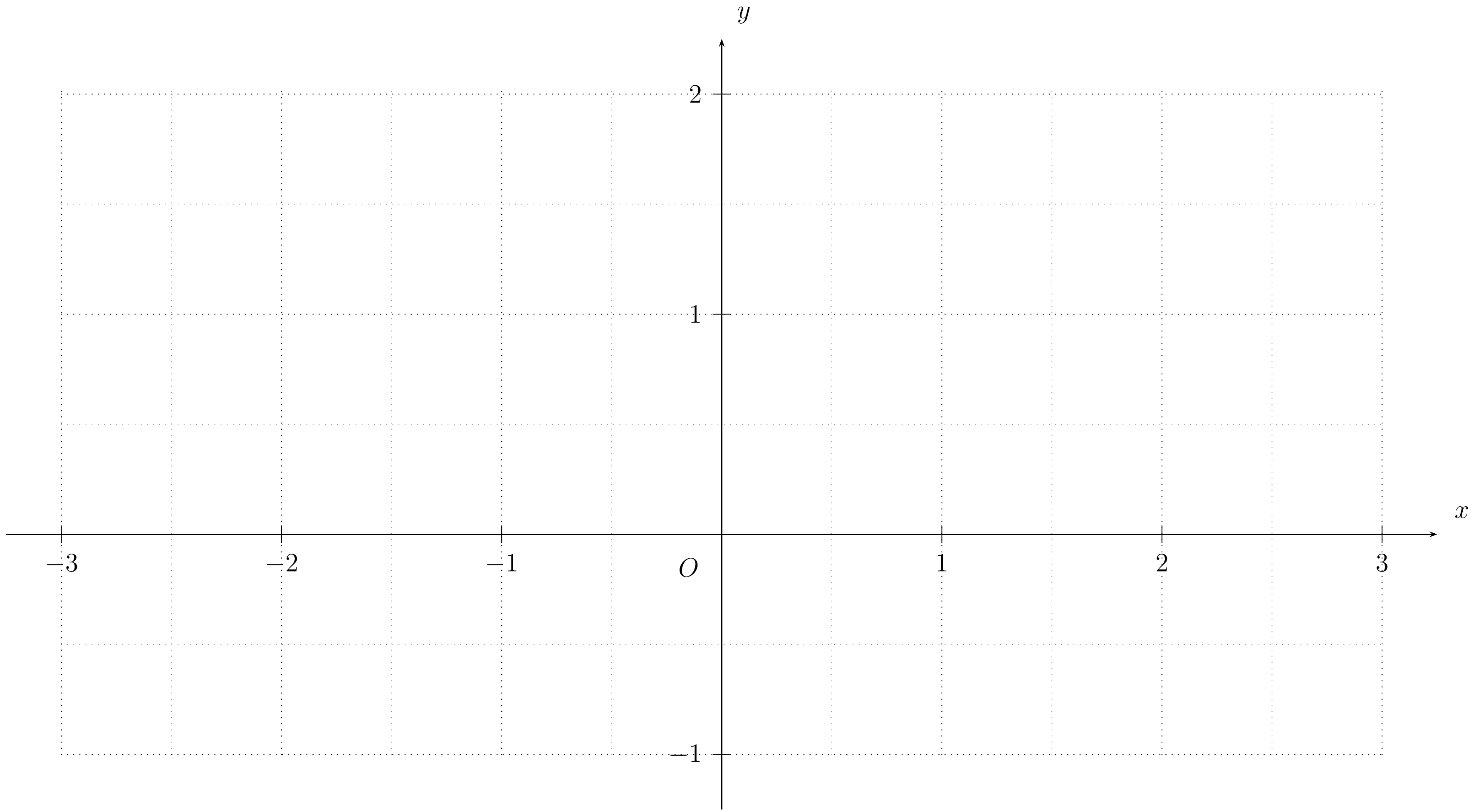
Exercice 4 [2,5 points]

Déterminer la valeur de chacune des intégrales A et B suivantes. *On pourra commencer par calculer $A + B$ et $A - B$ à l'aide de formules de trigonométrie bien connues.*

$$A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x \qquad\qquad B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

ANNEXE 1
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ____________________



ANNEXE 2

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ______________________________

$\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{6}\,\mathrm{d}x$ •	
$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t$ •	• e
$\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ •	• $\dfrac{1}{2}$
$\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{4\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ •	• 0
$\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{x}\,\mathrm{d}x$ •	• 1
$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$ •	• $\ln 2$
$\displaystyle\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$ •	