ESIEA – ÉCOLE D'INGÉNIEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

1A – Cycle de transition – Année 2016-2017

RENFORCEMENT NUMÉRIQUE : DEVOIR DU MERCREDI 14 DÉCEMBRE

Exercice 1 [6,5 points]

Soit f la fonction de la variable réelle x vérifiant l'égalité suivante. La courbe de f dans un repère orthonormé du plan est notée $\mathscr{C}_f$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ; on le notera I.

2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un seul point ; donner ses coordonnées.

3.a. Démontrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de I.

3.b. Quelle propriété graphique remarquable de $\mathscr{C}_f$ peut-on déduire de ce résultat ?

4.a. Calculer les limites de f aux bornes de I.

4.b. La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle des asymptotes ? Si oui, donner une équation de chacune d'elles.

5.a. Montrer que, quel que soit le réel x de I, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

5.b. En déduire le sens de variation de f sur I.

5.c. Quelle est une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en l'origine du repère ?

Exercice 2 [2,5 points]

Soit g la fonction définie pour tout réel x positif ou nul x par $g(x) = x\sqrt{x}$. Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer $g'(x)$ pour tout x de $[0, +\infty[$.

Exercice 3 [6 points]

Pour tout réel t, on pose $v(t) = (-t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^{-t}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels t vérifiant $v(t) = 0$.

2.a. Montrer que la dérivée de v est définie pour tout t de $\mathbb{R}$ par $v'(t) = (t^2 - 4)\mathrm{e}^{-t}$.

2.b. Étudier le signe de $v'(t)$ suivant les valeurs du réel t ; en déduire les variations de v.

3. Déterminer trois réels a, b et c de sorte que la fonction f définie par $f(t) = (at^2+bt+c)\mathrm{e}^{-t}$ pour tout t de $\mathbb{R}$ soit une primitive de v sur $\mathbb{R}$.

4. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide de deux intégrations par parties.

Exercice 4 [5 points]

Déterminer la valeur de chacune des intégrales suivantes.

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+2}\,\mathrm{d}x \qquad B = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \qquad C = \int_1^2 \frac{2x^2+3x-1}{x}\,\mathrm{d}x$$