Mathématiques et images

Devoir (en groupe) du 16 septembre

Exercice 1

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ le prédicat de récurrence suivant :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Initialisation

On a $S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $S^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

L'assertion $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité

Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose : $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors
$$S \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = S \times S^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

D'après l'énoncé et la définition de la puissance d'une matrice, il vient :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = S^{n+1} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

L'assertion $P(n+1)$ est donc vraie.

<u>Conclusion</u>

On a $P(n)$ quel que soit n dans $\mathbb{N}$.

2.a. On a :

$$J = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il vient $\underline{\underline{J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = O_{2,2}}}$

Une <u>récurrence immédiate</u> montrerait :

$$\boxed{\forall k \in [\![2 ; +\infty [\![, \quad J^k = O_{2,2}.}$$

2.b. Soit n dans $\mathbb{N}$.

L'égalité $\underline{J \times 5I_2 = 5I_2 \times J}$ est vraie

donc on peut affirmer :

$$S^n = (J + 5I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (5I_2)^{n-k}$$

De là :

$$S^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k 5^{n-k}$$

comme $\underline{J^k = O_{2,2} \text{ pour } k \text{ dans } [\![2, +\infty[\![}$,

on peut affirmer que, si $n \geq 1$:

$$S^n = \binom{n}{0} J^0 5^n + \binom{n}{1} J^1 5^{n-1}$$

$$S^n = 5^n I_2 + n 5^{n-1} J$$

$$S^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & -n5^{n-1} \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion</u> : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n = 0 \\ S^n = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix} & \text{si } n \neq 0 \end{array} \right.$$

On remarque qu'il est possible de <u>réunir les deux cas</u> $n = 0$ et $n \neq 0$.

2.c. D'après 1. et 2.b, on a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} u_n = (5^n + n5^{n-1})u_0 - n5^{n-1}v_0 \\ v_n = n5^{n-1}u_0 + (5^n - n5^{n-1})v_0 \end{cases}}$$

3. On remarque que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont que des cas particuliers de l'étude des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réalisée précédemment. On en déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_n = (5^n + n5^{n-1}) \times 1 - n5^{n-1} \times 5 \\ b_n = n5^{n-1} + (5^n - n5^{n-1}) \times 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} a_n = 5^{n-1}(5 - 4n) \\ b_n = 5^{n-1}(25 - 4n) \end{cases}}$$

Si $q \in]1;+\infty[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$.

De là, par produit des limites :

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty.}$$

Exercice 2

1. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_3}, \vec{v_5})$.

2. Impossible.

3. Impossible

4. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_6})$

5. Impossible

6. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_3}, \vec{v_5})$.

7. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_6})$.

8. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_6})$.

9. Impossible

10. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_3}, \vec{v_5})$

Exercice 3

1. On pose $\boxed{\lambda = a + 2b \quad \text{et} \quad \mu = a - b.}$

On a alors successivement :

$$\lambda U + \mu V = (a+2b)U + (a-b)I + (b-a)U$$

$$\lambda U + \mu V = 3b\, U + (a-b)\, I_3$$

$$\lambda U + \mu V = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

D'où $\underline{\lambda U + \mu V = M}$

2.a. On obtient $\boxed{U^2 = U}$ par <u>calcul direct</u>.

De là $\underline{\underline{V^2 =}}\ I_3 - 2U + U^2 = I_3 - \underline{\underline{U = V.}}$

D'autre part : $UV = U(I_3 - U)$

$UV = U - U^2$

donc $\boxed{UV = 0_{3,3}}$

De même, $\boxed{VU = 0_{3,3}.}$

2.b. Soit p dans $\mathbb{N}$ et soit α et β deux réels quelconques. On a $\alpha U \times \beta V = \beta V \times \alpha U$

d'après la question précédente, car $UV = VU = O_{3,3}$.

De là, si $p \geqslant 2$:

$$(\alpha U + \beta V)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\alpha U)^k (\beta V)^{p-k}$$

$$(\alpha U + \beta V)^p = \binom{p}{0} (\alpha U)^0 (\beta V)^p + \binom{p}{p} (\alpha U)^p (\beta V)^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} (\alpha U)^k (\beta V)^{p-k}$$

$$(\alpha U + \beta V)^p = \beta^p V^p + \alpha^p U^p + O_{3,3}$$

$(\alpha U + \beta V)^p = \beta^p V + \alpha^p U$. d'après la question 2.a. et une récurrence immédiate.

On remarque que la formule reste valable pour $p = 0$ et $p = 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad (\alpha U + \beta V)^p = \alpha^p U + \beta^p V}$

2.c. D'après 2.b. et 1., on a, pour tout entier naturel p :

$$\boxed{M^p = (a+2b)^p U + (a-b)^p V.}$$

3. La matrice W est un cas particulier de la matrice M, avec $a = 3$ et $b = -1$.

Il vient donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad W^p = (3-2)^p U + (3+1)^p V$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad W^p = U + 4^p V$$

En particulier :

$$W^4 = U + 256 I_3 - 256 U$$

$$W^4 = 256 I_3 - 255 U$$

$$W^4 = \begin{pmatrix} 256 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 256 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 85 & 85 & 85 \\ 85 & 85 & 85 \\ 85 & 85 & 85 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{W^4 = \begin{pmatrix} 171 & -85 & -85 \\ -85 & 171 & -85 \\ -85 & -85 & 171 \end{pmatrix}}$$

Exercice 4

1. La matrice A vérifie :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. On a successivement :

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \right\}$$

D'où $\boxed{E_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on peut affirmer qu'une base de E_0 est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

De même :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = x_1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = x_3 \\ 0 = x_4 \end{cases} \right\}$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

D'où $\boxed{E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on peut affirmer qu'une base de E_1 est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$ puisque $\mathcal{B}$ comporte exactement quatre vecteurs, or $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

Soit a, b, c et d dans $\mathbb{R}$. On suppose :

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} a-c+2d=0\\ b+c=0\\ b+d=0\\ a=0\end{cases}$$

De là :

$$\begin{cases} a=0\\ c=-b\\ d=-b\\ b+2b=0\end{cases}$$

Finalement, on a $\underline{a=b=c=d=0}$.

D'où la <u>conclusion</u>.

3. a. La matrice B vérifie :

$$\boxed{B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}$$

3. b. L'endomorphisme f est diagonalisable puisque sa matrice dans $\mathcal{B}$ est la matrice B précédente, qui est diagonale.

4. a. Par définition, on a

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. b. L'égalité cherchée est :

$$\boxed{B = P^{-1} A P}$$

Exercice 5

1. Soit x, y et z dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L \iff \begin{cases} y = -2x \\ -3x + 2x + x = 0 \\ z = x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L \iff \begin{cases} x = x \\ y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

Conclusion : $\operatorname{Ker} L = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une base de $\operatorname{Ker} L$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Le théorème du rang assure que $\dim(\operatorname{Im} L)$ vaut 2. On peut donc écrire :

$\operatorname{Im} L = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ or les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. De là :

une base de $\operatorname{Im} L$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

2.a. On calcule terme à terme :

$$L^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

Il vient donc :

$$(I_3 - L)(I_3 + L + L^2) = I_3 + L + \cancel{L^2} - L - \cancel{L^2} - L^3$$

$$(I_3 - L)(I_3 + L + L^2) = I_3$$

2.b. La question précédente permet d'affirmer :

$$(I_3 - L)(I_3 + L + L^2) = (I_3 + L + L^2)(I_3 - L) = I_3.$$

Ainsi, par définition, $I_3 - L$ est inversible et $(I_3 - L)^{-1} = I_3 + L + L^2$.

3. Il vient :

$$L\vec{u} = L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x - y + z \\ x - z \end{pmatrix}}$$

Les coordonnées de $L\vec{u}$ se lisent aisément.