Mathématiques et images

Correction du devoir du mercredi 16 septembre

Exercice 1

Voir les réponses sur l'annexe.

Exercice 2

1. Il est possible de poser :

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2. La dimension de $\mathbb{R}^3$ est égale à 3 or la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ comporte exactement trois vecteurs donc il suffit de montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre pour prouver que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit α, β et γ trois réels quelconques. On suppose : $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Il vient alors :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ 5\alpha+\beta = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On conclut : $\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ est libre}}$.

3.a. La <u>matrice de passage</u> P demandée est :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

3.b. D'une part, on a :

$$WP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on a :

$$PV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

L'égalité <u>$WP = PV$ est donc vérifiée</u>.

4.a. Comme P est la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, On a :

$$\boxed{P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Les égalités suivantes sont vrais :

$$\text{mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(f(\vec{u})\right) = W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = W \times P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Comme $WP = PV$, il vient :

$$\text{mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(f(\vec{u})\right) = PV\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Y \end{pmatrix}$$

or on a $\text{mat}_{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\left(f(\vec{u})\right) = V\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{\text{mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(f(\vec{u})\right) = P \times \text{mat}_{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\left(f(\vec{u})\right)}$$

Problème

Partie 1

1.1.a. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T \iff T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T \iff \begin{cases} ax + ay + az = 0 \\ bx + by + bz = 0 \\ cx + cy + cz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T \iff \begin{cases} a(x+y+z) = 0 \\ b(x+y+z) = 0 \\ c(x+y+z) = 0 \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, il vient :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T \iff x + y + z = 0}$$

1.1.b. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Il vient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On peut donc affirmer :

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Conclusion : $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker} T \text{ est } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)}$

1.2. Par définition de Im T, on a :

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$$

Il vient clairement : $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est non nul, on peut affirmer : l'image de T est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

1.3.a. On suppose $s \neq 0$. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

On a successivement :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \\ z = \lambda c \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \\ z = \lambda c \\ \lambda(a+b+c) = 0 \end{cases}$$

Comme $A \neq 0$, il vient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\text{Conclusion :}} \quad \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}}$$

1.3.b. Un <u>raisonnement similaire</u> à celui effectué à la question précédente assure que, <u>lorsque $A = 0$,</u> on a :

$$\boxed{\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T}$$

Partie 2

2.1. On obtient $\underline{\underline{T^2 = AT}}$.

2.2.a. Clairement, on a $\underline{\underline{M = T + I}}$.

2.2.b. On a successivement :

$$M^2 = (T + I)^2$$

$$M^2 = T^2 + 2T + I$$

$$M^2 = AT + 2T + I$$

$$M^2 = A(M - I) + 2(M - I) + I.$$

Après calculs, on obtient :

$$M^2 = (s+2)M - (s+1)I.$$

2.3. a. On suppose $s \neq -1$. L'égalité précédente peut alors se réécrire :

$$M^2 - (s+2)M = -(s+1)I$$

$$M\left(M - (s+2)I\right) = -(s+1)I$$

$$M\left(\frac{s+2}{s+1}I - \frac{1}{s+1}M\right) = I$$

Une factorisation à droite est également possible. Ainsi, il existe N dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $MN = NM = I$. La matrice M est inversible.

On suppose $s = -1$. Après l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3,$$

la matrice M devient :

$$\begin{pmatrix} a+b+c+1 & a+b+c+1 & a+b+c+1 \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{pmatrix}$$

qui est clairement non inversible.

Conclusion :

$$\boxed{M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}) \iff s \neq -1}$$

2.3.b. Les calculs menés dans la question précédente assurent que, si $\neq -1$, alors :

$$\boxed{M^{-1} = \frac{s+2}{s+1} I - \frac{1}{s+1} M}$$

Partie 3

3.1.a. On a :

$$\boxed{\begin{cases} T^0 = I \\ T^1 = T \\ T^n = 0_{3,3} \quad \text{pour } n \in [\![2, +\infty[\![\end{cases}}$$

3.1.b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ le prédicat $M^n = I + nT$.

Initialisation

$M^0 = I$ et $I + 0.T = 0$

On a donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

Hérédité

Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$.

Il vient alors successivement :

$$M \times M^n = M(I + nT)$$

$$M^{n+1} = (T+I)(I+nT)$$

$$M^{n+1} = T + nT^2 + I^2 + nTI$$

$$M^{n+1} = (n+1)T + I \quad \text{car } T^2 = O_{3,3}.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$

Conclusion

$$\boxed{\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + nT}$$

3.2.a. On a :

$$\boxed{\begin{cases} T^0 = I \\ T^n = s^{n-1}\, T \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

3.2.b. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

On a $\underline{T \times I = I \times T}$ donc la formule du binôme est applicable et on a :

$$M^n = (T+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k I^{n-k}$$

$$M^n = \binom{n}{0} T^0 I^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s^{k-1} T I^{n-k}$$

$$M^n = I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s^{k-1} \right) T$$

$$M^n = I + \frac{1}{s}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{k} - 1 \right) T$$

$$M^n = I + \frac{1}{s}\left((s+1)^n - 1 \right) T$$

$$M^n = I + \frac{(s+1)^n - 1}{s} T$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} M^0 = I \\ M^n = I + \dfrac{(s+1)^n - 1}{s} T \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

4.1.a. En posant $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$, on a $R = M$. On remarque : $s = 0$.

D'après 2.3.a., R est inversible.

D'après 2.3.b., on a $R^{-1} = 2I - R$.

D'où $\boxed{R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

4.1.b. D'après 3.1.b., on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R^n = I + nT$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad R^n = \begin{pmatrix} 1+n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & -n & 1-n \end{pmatrix}}$$

4.2. En posant $a = 2$, $b = -1$ et $c = -2$, on a $S = M$. On remarque : $\lambda = -1$.

D'après 2.3.a, S n'est pas inversible.

D'après 3.2.b, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S^n = I + \frac{0^n - 1}{\lambda} T$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S^n = S \quad \text{car} \quad S = I + T$$

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} S^0 = I \\ S^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{array}}$$

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

– CORRECTION –

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{12} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^{16} = \begin{pmatrix} 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \\ 64 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^t(3A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A + C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C^{2015} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (C + I_3)^7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$