Mathématiques et images

Correction du devoir à la maison

mercredi 30 septembre

Exercice 1

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ et soit λ dans $\mathbb{R}$.

On montre : $\underline{\underline{f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})}}$.

On peut écrire $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec

x, y, z, x', y' et z' six réels quelconques.

On a :

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = f\begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda z + z' - (\lambda y + y') \\ \lambda z + z' - (\lambda x + x') \\ 2(\lambda z + z') - (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda(z-y) + z' - y' \\ \lambda(z-x) + z' - x' \\ \lambda(2z-x-y) + 2z' - x' - y' \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\begin{pmatrix} z-y \\ z-x \\ 2z-x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'-y' \\ z'-x' \\ 2z'-x'-y' \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. a. On obtient successivement :

$$F = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \quad f(\vec{u}) = \vec{u} \}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} z - y = x \\ z - x = y \\ 2z - x - y = z \end{cases} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = z - y \\ z - (z - y) = y \\ 2z - (z - y) - y = z \end{cases} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = z - y \\ 0 = 0 \\ z = z \end{cases} \right\}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x + y - z = 0 \right\}}$$

Il est possible de transformer l'écriture de F obtenue précédemment ; en effet, on a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = -y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il vient donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{F = \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})} \\ \quad \text{avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

On montre ainsi que <u>F est le sous-espace vectoriel</u> engendré par la famille $(\vec{u}, \vec{v})$.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre. Par suite, la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est à la fois libre et génératrice de F ; ainsi, <u>la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de F</u>.

2. b. On procède de même :

$$G = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \; f(\vec{u}) = \vec{0} \}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \; \begin{cases} z - y = 0 \\ z - x = 0 \\ 2z - x - y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \; \begin{cases} y = z \\ x = z \\ 0 = 0 \end{cases} \right\}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \; \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \right\}}$$

Là encore, réécrivons G différemment :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \; \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il vient donc $\underline{\underline{G = \mathrm{Vect}(\vec{w})}}$ avec $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'ensemble <u>G est donc le sous-espace vectoriel</u> engendré par le vecteur $\vec{w}$.

Comme $\vec{w}$ n'est pas nul, on peut affirmer que la famille $(\vec{w})$ est libre. Ainsi, la famille $(\vec{w})$ est libre et génératrice de G.

<u>Conclusion :</u> <u>une base de G est $(\vec{w})$</u>.

3. On pose :

- $\overrightarrow{b_1} = \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{b_2} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{b_3} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme la dimension de $\mathbb{R}^3$ est égale à 3, il suffit de montrer que $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$ est <u>libre</u> pour prouver que $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Considérons trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 qui vérifient l'égalité :

$$\lambda_1 \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 \overrightarrow{b_2} + \lambda_3 \overrightarrow{b_2} = \vec{0}.$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Par suite, il est clair que :

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_3 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$$

Finalement, on obtient : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Cela montre que $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ est libre et, par suite, que $\underline{\underline{(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}}$.

4. a. On sait que $\vec{b_1}$ est dans F donc, par définition de F on a $\underline{\underline{f(\vec{b_1}) = \vec{b_1}}}$.

Même raisonnement pour $\vec{b_2}$: $\underline{\underline{f(\vec{b_2}) = \vec{b_2}}}$.

Comme $\vec{b_3}$ est dans G, on obtient $\underline{\underline{f(\vec{b_3}) = \vec{0}}}$ par définition de $\operatorname{Ker} f$.

4. b. Soit $(X;Y;Z)$ dans $\mathbb{R}^3$. Comme f est une application linéaire, on a :

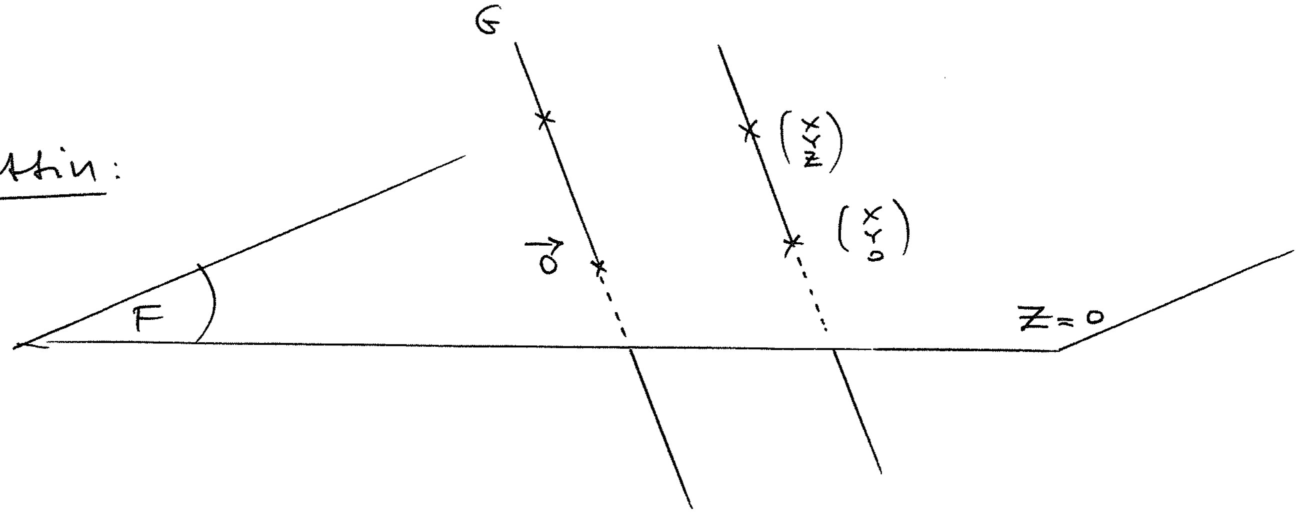
$$f(X\vec{b_1} + Y\vec{b_2} + Z\vec{b_3}) = X f(\vec{b_1}) + Y f(\vec{b_2}) + Z f(\vec{b_3}).$$

Grâce aux résultats de la question précédente, on peut affirmer :

$$\boxed{f(X\vec{b_1} + Y\vec{b_2} + Z\vec{b_3}) = X\vec{b_1} + Y\vec{b_2}}$$

5. D'après la question précédente, un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ est transformé en un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$. L'application f laisse donc fixes les deux premières coordonnées et met à zéro la troisième. Il s'agit d'une projection sur F parallèlement à G.

Dessin :



Exercice 2

1. Comme la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ comporte trois vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension égale à 3, il suffit de montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ est libre.

Soit α, β et γ trois réels quelconques. On suppose que l'égalité suivante est vraie :
$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{d} = \vec{0}$. On a alors successivement :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -4\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ -5\beta + \gamma = 0 \\ 11\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ substitution de α dans L_2 et L_3

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = 5\beta \\ 6\beta = 0 \end{cases}$$ substitution de γ dans L_3

Il vient donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Ce qu'il fallait démontrer.

On remarque : $\underline{\underline{\vec{c} = \vec{a} - \vec{d}}}$.

On peut donc écrire, en notant $\mathcal{B}$ la base égale à $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$: $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

2. Montrons que $\underline{\underline{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ est libre}}}$. On considère trois réels α, β et γ tels que :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}.$$

Il vient donc :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma (\vec{a} - \vec{d}) = \vec{0}.$$

De là :

$$(\alpha + \gamma) \vec{a} + \beta \vec{b} - \gamma \vec{d} = \vec{0}.$$

Comme la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ est <u>libre</u>, on en déduit $\alpha + \gamma = \beta = -\gamma = 0$, et donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. <u>Ce qu'il fallait démontrer</u>.

Exercice 3

1. a. On remarque : $\vec{u_3} = 2\vec{u_2} - 2\vec{u_1}$. La famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est donc liée.

1. b. D'après la question précédente, on peut écrire $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$.

Par suite, on a :

$$F = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \exists (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{u} = \lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2} \}$$

car on rappelle que $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

Ainsi :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \exists (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = 3\lambda + 4\mu \end{cases} \right\}$$

Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ fixé dans $\mathbb{R}^3$, résolvons le système en λ et μ suivant :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 2\lambda + 3\mu = y \\ 3\lambda + 4\mu = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x & \\ -\mu = y - 2x & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2\mu = z - 3x & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x & \\ -\mu = y - 2x & \\ 0 = x - 2y + z & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

Il est donc possible d'écrire :

$$\boxed{F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x - 2y + z = 0 \right\}}$$

Ce qui répond à la question posée.

2.a. Posons $\underline{\underline{G = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$. L'ensemble G est alors un <u>espace vectoriel différent de $\{\vec{0}\}$</u>. Montrons l'égalité $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

- l'inclusion $\{\vec{0}\}$ est triviale puisque $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in G$: on rappelle que tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $F \cap G$. Montrons que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le vecteur nul.

Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans G, il existe un réel λ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans F donc $x - 2y + z = 0$, donc $\lambda - 2 \times 0 + 0 = 0$.

Ainsi, $\lambda = 0$ et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.b. Soit $\vec{u}$ dans $\mathbb{R}^3$. On peut écrire $\vec{u}$ sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec x, y et z trois réels donnés.

On a l'<u>égalité suivante</u> :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - 2y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{v} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\vec{w} = (x - 2y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

il vient $\underline{\underline{\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}}}$

. Montrons que <u>$\vec{v}$ est dans F</u>.

On a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

or on a bien $(2y-z) - 2y + z = 0$

donc $\vec{v} \in F$

. Montrons que <u>$\vec{w}$ est dans G</u>.

On a $\vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = x - 2y + z$

donc $\vec{w} \in G$.

<u>Ce qu'il fallait démontrer</u>.