Renforcement numérique

Indication de correction du devoir du jeudi 15 septembre

Question de cours

1. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est appelé ensemble des nombres rationnels. Il est constitué de toutes les fractions, c'est-à-dire des nombres $\frac{a}{b}$ avec a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}}$$

2. Un ensemble est dit dénombrable si l'on peut énumérer ses éléments, c'est-à-dire s'il est fini ou bien s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et cet ensemble. L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable, tout comme l'ensemble $\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ ou l'ensemble $[\![1;13]\!]$.

On dit qu'un ensemble est discret lorsqu'il ne contient que des <u>points isolés</u> ; en quelque sorte, c'est un ensemble « à trous ». L'<u>ensemble $\mathbb{N}$</u> et l'<u>ensemble $\mathbb{Z}$</u> sont des ensembles discrets.

3. Il existe neuf types différents d'intervalles. Commençons par les <u>intervalles bornés</u>. Pour ces intervalles, il y a :

- les intervalles <u>ouverts</u>, comme $]1,7[$,
- les intervalles <u>fermés</u>, comme $[-2,5]$,
- les intervalles <u>ni ouverts ni fermés</u>, appelés aussi semi-ouverts ou semi-fermés, comme $]2,7]$ ou $[-1,4[$.

Il y a aussi les <u>intervalles non bornés</u>, qui sont constitués :

- des intervalles <u>ouverts</u>, comme $]-\infty,4[$ ou $]0,+\infty[$,
- des intervalles <u>fermés</u>, comme $[1,+\infty[$ ou $]-\infty,-4]$,
- de l'intervalle <u>infini</u>, qui est $]-\infty,+\infty[$.

4. Si z est un nombre complexe, une racine cubique de z est un nombre Z tel que $Z^3 = z$. Un nombre complexe admet, en général, plusieurs racines cubiques : on a par exemple :

$$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^3 = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^3 = 2^3 = 8$$

ce qui montre que le complexe 8 admet au moins trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$.

En revanche, si a est dans $\mathbb{R}+$, alors il existe un unique réel positif b tel que $b^3 = a$. C'est ce réel qu'on appelle la racine cubique de a et que l'on note $\sqrt[3]{a}$. Ainsi, la notation $\sqrt[3]{\ldots}$ ne peut pas être utilisé pour les nombres complexes.

En réalité, concernant la racine cubique, on peut donner un sens à $\sqrt[3]{a}$ pour tout a de $\mathbb{R}$ (et pas seulement de $\mathbb{R}+$) car la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est bijective.

5. Pour tout entier naturel non nul n, la <u>factorielle de n</u> est l'entier <u>noté $n!$</u> et défini comme le <u>produit</u> de tous les entiers de 1 à n. On a $\boxed{n! = \prod_{k=1}^{n} k}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. On pose aussi $0! = 1$.

Exercice 1

voir l'<u>ANNEXE</u>.

Exercice 2

Soit x et y dans $]1, +\infty[$ tels que $x \neq y$.

On a les calculs suivants.

$$A = \frac{\dfrac{x(x-y)}{x-y} + \dfrac{xy}{x-y}}{\dfrac{y(y-x)}{y-x} + \dfrac{xy}{y-x}}$$

après réduction au même dénominateur

$$A = \frac{\dfrac{x^2}{x-y}}{\dfrac{y^2}{y-x}}$$

car $-xy + xy = 0$ après somme des fractions

$$A = \frac{x^2}{x-y} \times \frac{y-x}{y^2}$$

$$\boxed{A = -\frac{x^2}{y^2}}$$ car $\frac{y-x}{x-y} = -1$

De même, on obtient :

$$B = \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$B = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$$

car $(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) = 1-x$

et car $-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$.

$$\boxed{B = 0}$$ après addition des deux fractions

Enfin, on a :

$$C = \frac{1}{1+\frac{x}{y}} + \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$$

$$C = \frac{1}{\frac{y+x}{y}} + \frac{1}{\frac{x+y}{x}}$$ après réduction au même dénominateur

$$C = \frac{y}{y+x} + \frac{x}{x+y}$$

$\boxed{C = 1}$ après addition des deux fractions

Exercice 3

1. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a successivement :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x+1})^2$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = x - (x+1)$$

$$\underline{\underline{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = -1}}$$

2. Soit $x \in]0, +\infty[$. On remarque :

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{-1}$$

d'après la question précédente.

De là : $$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Il est donc possible de transformer S :

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{99} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)}$$

Ainsi, de manière abusive :

$$S = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3})$$

$$+ \dots + (\sqrt{98} - \sqrt{97}) + (\sqrt{99} - \sqrt{98})$$

$$+ (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

Par simplification télescopique, on a :

$$S = -\sqrt{1} + \sqrt{100}$$

D'où $\boxed{S = 9}$

Exercice 4

On se contente de donner les résultats obtenus après factorisation des trinômes P et Q :

$$\boxed{P = (2x+1)(3x-1)} \qquad \boxed{Q = (2x+3)(2x+3)}$$

Exercice 5

On rappelle la formule du binôme. Pour tous réels x et y et pour tout naturel n, on a :

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial défini pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout k de $[\![0,n]\!]$

par $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$A = \binom{4}{0} x^0 \times 2^4 + \binom{4}{1} x^1 \times 2^3 + \binom{4}{2} x^2 \times 2^2 + \binom{4}{3} x^3 \times 2^1 + \binom{4}{4} x^4 \times 2^0$$

$$A = 16 + 4 \times 8 \times x + 6 \times 4 \times x^2 + 4 \times x^3 \times 2 + x^4$$

$$\boxed{A = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$$

$$B = \binom{5}{0} x^5 \times (-1)^0 + \binom{5}{1} x^4 \times (-1)^1 + \binom{5}{2} x^3 \times (-1)^2$$

$$+ \binom{5}{3} x^2 \times (-1)^3 + \binom{5}{4} x (-1)^4 + \binom{5}{5} x^0 (-1)^5$$

$$B = x^5 + 5x^4 \times (-1) + 10x^3 + 10x^2 \times (-1) + 5x + (-1)$$

$$\boxed{B = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1}$$

<u>Exercice 6</u>

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$-x^2 - 6x \geqslant 8x^2 + 1 \iff 9x^2 + 6x + 1 \leqslant 0$$

$$-x^2 - 6x \geqslant 8x^2 + 1 \iff (3x+1)^2 \leqslant 0$$

On sait que, pour tout réel X, on a $\boxed{X^2 \leqslant 0 \iff X = 0}$ puisque le carré d'un réel est toujours positif ou nul. De là :

$$-x^2 - 6x \geqslant 8x^2 + 1 \iff 3x + 1 = 0$$

<u>Conclusion</u> : l'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

D'autre part, on sait que, pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout a de $\mathbb{R}_+$, on a

$$\boxed{|x| = a \iff x = a \text{ ou } x = -a.}$$

De là, on a l'équivalence :

$$|x^2 + 2x| = 1 \iff x^2 + 2x = 1 \text{ ou } x^2 + 2x = -1$$

c'est-à-dire :

$$|x^2 + 2x| = 1 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ ou } (x+1)^2 = 0$$

Le trinôme $x^2 + 2x - 1$ possède un discriminant Δ tel que $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1)$, c'est-à-dire $\underline{\underline{\Delta = 8}}$. Il existe donc <u>deux racines réelles</u> simples à ce trinôme, qui sont les réels r_1 et r_2 tels que :

$$r_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2}$$

Après simplification et car $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$:

$$\underline{\underline{r_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad r_2 = -1 + \sqrt{2}}}$$

On peut donc écrire :

$$|x^2+2x|=1 \iff x=-1-\sqrt{2} \text{ ou } x=-1+\sqrt{2} \text{ ou } x=-1$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble $\{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -1\}$.

Exercice 7

On a :

$$A_1 = \frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad \boxed{A_1 = \frac{11}{3}}$$

$$A_2 = \frac{1^2}{1+1}\times\frac{2^2}{2+1}\times\frac{3^2}{3+1} \quad \text{donc} \quad \boxed{A_2 = \frac{3}{2}}$$

A_3 peut être calculé à la manière historique (attribuée à Gauss) ou comme somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. On obtient $\boxed{A_3 = 5050.}$

Exercice 8

1. Soit a et b dans $\mathbb{R}^*$ tels que $\frac{a}{b} = 2$. On peut alors affirmer : $a = 2b$. De là :

$$A = \frac{a + 2b}{a - 3b} = \frac{2b + 2b}{2b - 3b} = \frac{4b}{-b}$$

$$\boxed{A = -4}$$

$$B = \frac{(2b)^2 - b^2}{(2b)^2 + b^2} = \frac{4b^2 - b^2}{4b^2 + b^2} = \frac{3b^2}{5b^2}$$

$$\boxed{B = \frac{3}{5}}$$

2. Soit p, q, r et s dans $\mathbb{R}^*$. On suppose $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ avec $r \neq s$ et $r \neq -s$.

On a donc $\frac{p}{q} + 1 = \frac{r}{s} + 1$.

D'où $\frac{p+q}{q} = \frac{r+s}{s}$.

D'où l'égalité voulue en divisant par 2.

On a d'une part :

$$\frac{p^2+q^2}{r^2+s^2} = \frac{q^2\left(\frac{p^2}{q^2}+1\right)}{s^2\left(\frac{r^2}{s^2}+1\right)} = \frac{q^2\left(\frac{r^2}{s^2}+1\right)}{s^2\left(\frac{r^2}{s^2}+1\right)} = \frac{q^2}{s^2}.$$

puisque $\dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{r^2}{s^2}$

D'autre part :

$$\frac{p^2-q^2}{r^2-s^2} = \frac{q^2\left(\frac{p^2}{q^2}-1\right)}{{}^2\left(\frac{r^2}{s^2}-1\right)} = \frac{q^2\left(\frac{r^2}{s^2}-1\right)}{s^2\left(\frac{r^2}{s^2}-1\right)} = \frac{q^2}{s^2}.$$

pour les mêmes raisons.

D'où l'égalité $\dfrac{p^2+q^2}{r^2+s^2} = \dfrac{p^2-q^2}{r^2-s^2}$.

Exercice 9

On pose $N = 143\ 987\ 659\ 322$.

On cherche à déterminer lequel des réels

$$\frac{N-1}{N} \quad \text{et} \quad \frac{N}{N+1}$$ est le plus grand.

On a de manière évidente : $N^2 - 1 < N^2$

D'où $(N-1)(N+1) < N \times N$

D'où, après multiplication par le réel strictement positif égal à $\frac{1}{N(N+1)}$:

$$\frac{(N-1)(N+1)}{N(N+1)} < \frac{N \times N}{N(N+1)}$$

D'où $\boxed{\frac{N-1}{N} < \frac{N}{N+1}}$.

<u>Conclusion</u> : des deux nombres proposés, c'est

$\frac{143\ 987\ 659\ 322}{143\ 987\ 659\ 323}$ qui est le plus grand.

ANNEXE

(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : — CORRECTION —

On a l'égalité $\sqrt[4]{49} = \ldots$

On a l'égalité $\dfrac{3^5}{9^3} \times 3^2 = \ldots$

On a l'égalité $\dbinom{6}{2} = \ldots$

On a l'égalité $\dfrac{\sqrt{8}}{4} \times \sqrt{6} = \ldots$

On a l'égalité $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4 = \ldots$

On a l'égalité $\sqrt[5]{243} = \ldots$

On a l'égalité $\dfrac{4!}{2} = \ldots$

… $\sqrt{7}$.

… 3.

… 15.

… 12.

… $\sqrt{3}$.