Chapitre 1

Introduction à l'écriture mathématique

Le lecteur sait vraisemblablement reconnaître un traité de mathématiques à l'abondance des symboles $x, \forall, \in$ et autres, ainsi qu'à l'omniprésence du mot « démonstration ».

La forme adoptée par presque tous les livres de mathématiques est en effet l'alternance d'*énoncés* et de *preuves*. Cette alternance est plus ou moins agrémentée d'exemples et d'appels à l'intuition, selon la visée pédagogique. Mais le consensus est établi depuis longtemps, sur un canon attribué à Euclide même : en mathématiques, on *démontre* ce qu'on *affirme* au moyen de procédés bien codifiés. Le présent ouvrage ne déviera pas du dogme.

Or l'exercice très encadré de la démonstration embarrasse souvent le débutant ; parfois même, elle l'inhibe tout à fait. Il ne sait pas l'écrire, il ne sait pas l'apprendre ; il arrive qu'il ne sache même pas la lire. Les quelques méthodes à connaître relèvent pourtant du bon sens, et sans doute est-ce pour cela que certains cours introductifs omettent de les rappeler. Avoir autant d'idées qu'Euler n'est certes pas facile. Mais pour peu qu'on sache ce que l'on veut dire, la rédaction d'une démonstration correcte est un jeu d'enfant. L'art en est tellement rigide qu'avec quelques principes de base, on écrit parfaitement.

Ces principes sont rappelés dans le présent chapitre. Nos conseils et interdits ne sont à prendre à la lettre que dans un premier temps. Bientôt le lecteur pourra s'en affranchir, car *ce qui compte est l'esprit de rigueur et de clarté.*

Ce chapitre est différent des autres : il ne contient pas de théorie mathématique, seulement de la méthodologie. Cela le rend moins technique en apparence, mais peut-être aussi plus long à assimiler. *Cela ne se fera que par la pratique.* Le lecteur fera bien d'y revenir régulièrement.

Attention — **Énoncés et démonstrations**

Il y a une différence entre énoncés et démonstrations. Cette règle fondamentale passe souvent inaperçue.

C'est à peu près la même différence qu'entre une position et un déplacement, que certainement le lecteur ne confond pas dans la vie courante. Cette différence essentielle ne devrait jamais être dissimulée, car tout en découle. Elle inspire notamment le plan de ce chapitre.

- Les énoncés mathématiques peuvent se noter dans une langue dédiée qu'il faut apprendre. Les règles en sont très simples ; on les étudie dans la section I.
- Les démonstrations mathématiques, en revanche, s'écrivent *seulement dans le langage usuel* (ici, le français). La section II est consacrée aux grandes techniques de démonstration.
- Une troisième section complète cet exposé par quelques conseils à suivre et écueils à éviter.

I. La langue symbolique

Les mathématiciens ont par commodité adopté une notation symbolique leur permettant d'exprimer de manière concise la plupart de leurs affirmations. Le lecteur en est certainement familier. Ces signes sont de beaucoup postérieurs aux commencements des mathématiques ;

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

par exemple, « $=$ » n'apparaît qu'au XVI$^{\text{e}}$ siècle, « $\exists$ » à la fin du XIX$^{\text{e}}$, et « $\forall$ » dans les années 1930. Il va sans dire que d'éminents mathématiciens ne les utilisaient pas.

Répétons que ces symboles ne servent pas pour les démonstrations, seulement pour les propositions. Les passer en revue devrait dissiper certaines confusions fréquentes.

I.1. Propositions, vérité, équivalence

I.1.1. Propositions

Les mots « énoncé », « proposition », « affirmation », « assertion » ont le même sens en mathématiques. Ils désignent les phrases qui intéressent les mathématiciens. Nous resterons au niveau informel, car le lecteur a déjà certainement la pratique et l'intuition de ces dernières.

Exemple 1.1.

- « Tout nombre pair est nul » est une proposition.
- « Passe-moi le sel » n'est pas une proposition.
- « Dans tout triangle rectangle, $a^2 + b^2 = c^2$ » n'est pas une proposition (que désignent a, b, c ?).
- En toute rigueur, « $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ » n'est pas une proposition (on ne sait rien de x). Nous reviendrons sur le problème de la *quantification* à la section I.3.

► Une proposition n'est pas forcément écrite en symboles mathématiques.

Et même, tout ce qui est écrit en symboles mathématiques n'est pas forcément une proposition. De nombreux charlatans dans l'histoire de la pensée ont habillé leurs élucubrations de symboles pour leur donner l'apparence de la rigueur. La pensée mathématique et l'écriture symbolique sont deux choses indépendantes.

I.1.2. Vérité

Sans entrer dans le détail, une proposition mathématique est soit vraie, soit fausse, même s'il n'est pas toujours évident de déterminer sa « valeur de vérité » (sinon, il n'y aurait pas de recherche en mathématiques, seulement des exercices).

Exemple 1.2.

- « Tout nombre réel est le carré d'un nombre réel » est une proposition fausse.
- La proposition « tout nombre complexe est le carré d'un nombre complexe » est vraie.
- La proposition « dans tout triangle rectangle du plan, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés de la longueur des autres côtés » est vraie.
- On ignore si la proposition « il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ soit aussi premier » est vraie ou fausse (question vieille de deux millénaires et demi).

Il est aisé de noter les deux premières propositions en symboles. Pour les deux dernières en revanche, ce serait possible, mais au prix d'une telle lourdeur qu'on ne le fait jamais.

► La notation symbolique, jamais indispensable, est tantôt pratique et tantôt malcommode.

On note souvent P, Q, R, etc. des propositions mathématiques.

Règle 1.3. (Principe d'« affirmation par défaut ») *Quand dans une rédaction mathématique on écrit sans précaution : « P », on affirme que P est vraie.*

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Exemple 1.4. Il revient au même d'écrire :
- « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ » ;
- « On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ » ;
- « Il est vrai que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ ».

Alors pourquoi mettre quelque chose plutôt que rien devant la proposition qu'on affirme ? D'une part, pour souligner que c'est une affirmation (par opposition aux hypothèses, conjectures, etc.), ce dont nous reparlerons à la section III.4.2. Mais aussi parce que c'est plus lisible, voire plus agréable : il arrive en effet qu'une proposition mathématique commence par une minuscule, ce qui choque l'œil (nous le verrons à la section III.2).

I.1.3. Équivalence de deux propositions

Définition 1.5. *Soit* P *et* Q *deux propositions. Si* P *et* Q *ont la même valeur de vérité, on dit qu'elles sont équivalentes.*

Attention **Absence de notation**

Il n'y a pas de notation pour la notion d'équivalence. La notation $P \Leftrightarrow Q$ désigne une « proposition composée ». C'est autre chose !

Nous espérons choquer le lecteur avec cette mise en garde. Que deux propositions soient équivalentes peut se produire ou non ; c'est un *fait*, pas une proposition. Nous verrons dans la section I.2.4 comment *exprimer* ce fait par une proposition (et le lecteur retrouvera la notation $P \Leftrightarrow Q$ dont il est familier sans doute).

Remarque. La méthode dite des « tables de vérité » permet de se représenter les équivalences de propositions composées par les connecteurs logiques $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$; au lieu de faire un long discours, nous l'exposerons au fur et à mesure dans la section I.2.

Cette méthode est un moyen mais pas une fin. Elle ne sert qu'à se convaincre de certaines équivalences. Il faut l'avoir comprise au point de la juger superflue, un peu comme le passage de $x = y$ à $x - y = 0$ que le lecteur trouve évident.

I.2. Connecteurs logiques

I.2.1. Négation

Soit P une proposition.

Notation. La proposition « non P » est notée $\neg P$; elle s'appelle la négation de P.

Quand P est vraie, $\neg P$ est fausse, réciproquement, et inversement. On peut condenser cela dans une *table de vérité* comme suit (F signifie bien sûr « faux » et V « vrai »).

Règle 1.6. (Table de vérité de $\neg$)

P	$\neg P$
F	V
V	F

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Les propositions P et $\neg\neg P$ (« non non P ») sont équivalentes, comme on peut le voir en construisant une table composée :

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
F	V	F
V	F	V

Les propositions P et $\neg\neg P$ ont toujours la même valeur de vérité : elles sont équivalentes.

Remarques.

◇ La négation de $x = y$ est $\neg(x = y)$, mais on utilise bien sûr le symbole $\neq$. Plus généralement, on emploie les symboles $\notin, \not\subset, \not\subseteq, \not\equiv, \nmid$ (« ne divise pas »), et d'autres exprimant la négation. Attention, ce sont les seuls symboles que l'on barre.
◇ La négation se notait aussi jadis $\sim P$ ou $\overline{P}$.
◇ Il n'y a pas de notion de « contraire » en mathématiques.
◇ On mettra souvent des parenthèses dans la suite, car P sera elle-même obtenue à partir d'autres propositions. Nous en verrons des exemples dès que nous aurons de nouveaux connecteurs.

I.2.2. Conjonction et disjonction

Soit P et Q deux propositions.

Notation. La proposition « P et Q » est notée $P \wedge Q$; elle s'appelle la conjonction de P et de Q.

La proposition $P \wedge Q$ est vraie seulement quand les deux propositions sont vraies (et fausse dès que l'une des deux est fausse). Pour la table de vérité il faut trois colonnes.

Règle 1.7. (Table de vérité de $\wedge$)

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Remarque. L'ordre dans lequel nous avons énuméré les valeurs de vérité possibles pour P et Q est ainsi (verticalement) : FF, FV, VF, VV. Cet ordre est en fait naturel en termes de « logique binaire », où F correspond à 0 et V correspond à 1. On a en effet simplement compté en binaire : $00, 01, 10, 11$.

On voit que $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont équivalentes ; on voit aussi que $P \wedge (Q \wedge R)$ et $(P \wedge Q) \wedge R$ sont équivalentes ; le lecteur peut ici se fier à son bon sens. Au cas où celui-ci ferait temporairement défaut, une table de vérité suffit à se convaincre.

Remarque. La négation de $P \wedge Q$ se note $\neg(P \wedge Q)$; cette proposition n'est pas équivalente à $\neg P \wedge Q$. La règle à retenir est qu'il vaut mieux mettre trop de parenthèses que risquer de se tromper. (Cela dit, une surcharge de parenthèses peut gêner la lecture.)

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Test 1.1 solution page 973

Écrire la table de vérité de $P \wedge P$ et celle de $P \wedge \neg P$. Conclusion ?

Test 1.2 solution page 973

Écrire la table de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et celle de $\neg P \wedge Q$. Comparer.

Remarques.

- ◇ En français, le mot « et » permet d'énumérer : « n est plus petit que 7 *et* plus grand que 3 ». Mais la langue symbolique n'admet que la conjonction de *propositions* : « n est plus petit que 7 *et* n *est* plus grand que 3 ». On doit donc écrire $n \leqslant 7 \wedge n \geqslant 3$.
- ◇ Le seul moyen de traduire « mais » en symboles est par « et ». La nuance est perdue. La traduction mathématique de « x est pair *mais* pas divisible par 4 » est ainsi : « $2|x \wedge 4 \nmid x$ ».
- ◇ La conjonction se notait aussi jadis « & ».

Notation. La proposition « P ou Q » est notée $P \vee Q$; elle s'appelle la disjonction de P et de Q.

La proposition $P \vee Q$ est vraie dès que l'une des deux propositions est vraie, et n'est fausse que si les deux le sont.

Règle 1.8. (Table de vérité de $\vee$)

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Remarques.

- ◇ Le « ou » mathématique est dit *inclusif*, car si P et Q sont vraies, $P \vee Q$ l'est aussi.
- ◇ Le français en revanche emploie souvent le « ou » *exclusif*. Quand on promet « de vous rappeler le jour même ou le lendemain », on sous-entend que ce ne sera pas les deux. Ce n'est pas ainsi que fonctionne le « ou » mathématique. (La réponse du mathématicien à la question « Est-ce un garçon ou une fille ? » est : « oui ».)
- ◇ Pour être clair à l'oral, un mathématicien exprimera le « ou » exclusif par « ou bien P ou bien Q », ou simplement par « P ou bien Q ». On dit aussi (mais cela peut perturber l'étudiant) « P ou alors Q » ; il va de soi qu'« alors » ici n'exprime pas l'implication.
- ◇ Pas plus que la conjonction, le « ou » ne peut servir dans les énumérations. On n'écrit donc jamais « $x = 1 \vee 2$ », mais « $x = 1 \vee x = 2$ ».

Les règles suivantes tiennent du bon sens ; en cas de doute hyperbolique, on peut les vérifier sur des tables de vérité.

Règle 1.9. (Commutativité de $\wedge$ et de $\vee$)

- ◇ *Les propositions* $P \wedge Q$ *et* $Q \wedge P$ *sont équivalentes.*
- ◇ *Les propositions* $P \vee Q$ *et* $Q \vee P$ *sont équivalentes.*

Règle 1.10. (Associativité de $\wedge$ et de $\vee$)

- ◇ *Les propositions* $(P \wedge Q) \wedge R$ *et* $P \wedge (Q \wedge R)$ *sont équivalentes.*
- ◇ *Les propositions* $(P \vee Q) \vee R$ *et* $P \vee (Q \vee R)$ *sont équivalentes.*

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

On peut bien sûr composer les connecteurs $\wedge$ et $\vee$, et le lecteur verra que $(P \wedge Q) \vee R$ et $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ sont équivalentes :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V

Comme les troisième et sixième colonnes portent toujours la même valeur, les propositions $(P \wedge Q) \vee R$ et $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ sont bien équivalentes. Le lecteur doit se convaincre de la règle symétrique, si besoin par la même méthode.

Règle 1.11. (Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et de $\wedge$ par rapport à $\vee$)

- ◇ *Les propositions* $(P \wedge Q) \vee R$ *et* $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ *sont équivalentes.*
- ◇ *Les propositions* $(P \vee Q) \wedge R$ *et* $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ *sont équivalentes.*

On comprend aussi que $P \vee \neg P$ est toujours vraie (« être ou ne pas être » n'est pas pour le mathématicien une question, c'est une évidence).

Il y a quelques règles de préséance entre les symboles $\vee$ et $\wedge$, pareilles à celles entre $+$ et $\cdot$; pour le mathématicien, c'est de piètre importance. En revanche, il est essentiel de travailler le point suivant jusqu'à le trouver évident, en commençant par les tables de vérité.

Règle 1.12. (Règles de De Morgan)

- ◇ *Les propositions* $\neg(P \wedge Q)$ *et* $(\neg P) \vee (\neg Q)$ *sont équivalentes.*
- ◇ *Les propositions* $\neg(P \vee Q)$ *et* $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ *sont équivalentes.*

Avec toutes ces règles on peut se passer de tables de vérité : on sait tout « développer » encore plus facilement qu'en calcul ordinaire.

Test 1.3 solution page 973

Construire des tables de vérité illustrant les règles de De Morgan.

Test 1.4 solution page 973

Développer les propositions suivantes.

1) $\neg((P \wedge Q) \vee (R \wedge S))$.

2) $\neg(P \vee Q \vee R) \vee \neg(P \wedge Q)$.

Test 1.5 solution page 973

1) Trouver une proposition équivalente à $P \wedge Q$ qui n'utilise que $\neg$ et $\vee$.

2) Même question en échangeant $\vee$ et $\wedge$.

I.2.3. Implication

L'implication est fort mal comprise ; le lecteur même sûr de lui fera bien de s'attarder un peu ici.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Notation. La proposition « si P, alors Q » est notée $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$; on l'appelle l'implication de P vers Q.

La proposition $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est vraie dans tous les cas, sauf un : quand P est vraie et Q fausse.

Règle 1.13. (Table de vérité de $\Rightarrow$)

P	Q	$\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

EXEMPLE 1.14. La proposition « si les poules ont des dents, alors je suis le père Noël » est *vraie*.

Le lecteur est certainement familier de ce fait, qu'il a pu mémoriser sous le slogan « faux implique n'importe quoi » ou quelque chose d'approchant.

Remarque. L'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est ainsi vraie même si P et Q n'ont « pas de rapport » au sens intuitif du terme. Cela pose de petits problèmes philosophiques dans lesquels nous n'entrerons pas. En tout cas, la proposition $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est vraie indépendamment de la « pertinence » de l'implication, indépendamment de l'existence d'un argument linéaire établissant Q à partir de P. Il faut bien comprendre que $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ n'a *rien à voir avec les déductions*, mais que cette proposition représente seulement une certaine *corrélation des valeurs de vérité.*

Avec une table de vérité, on observe que $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ et $\neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ sont équivalentes.

Remarque. C'est d'ailleurs intuitif : quand on dit « n'approchez pas, ou je tire », tout le monde comprend « si vous approchez, alors je tire ». (D'ailleurs la personne peut tirer sans que vous ayez bougé, et être cohérente logiquement.)

En particulier, $\neg(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q})$ est équivalente à $\neg(\neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$, donc d'après les règles de De Morgan elle est aussi équivalente à $\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$.

Remarque. De cela aussi le lecteur est familier. La plupart des théorèmes mathématiques sont de la forme « Supposons P. Alors on a Q », c'est-à-dire de la forme $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$. Pour réfuter un tel énoncé (c'est-à-dire pour montrer qu'il est faux), on produit une situation où les hypothèses sont vérifiées, mais pas la conclusion : c'est-à-dire un cas où l'on a $\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$, qui est bien la négation de $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$.

Test 1.6 solution page 973

1) Trouver une proposition équivalente à $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ qui n'utilise que $\neg$ et $\Rightarrow$.

2) Même question pour $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$.

3) Exprimer à présent $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ à l'aide de $\neg$ et $\wedge$.

Attention **Lecture de $\Rightarrow$**

La flèche d'implication $\Rightarrow$ se lit « implique », ou « si… alors… ». Elle ne se lit pas « alors ».

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

En effet, quand bien même « P alors Q » aurait un sens (mais ce n'est guère français), ce ne serait pas le bon : on comprendrait plutôt que P et Q sont toutes deux vraies, ce qui est beaucoup plus restrictif que d'affirmer $P \Rightarrow Q$.

Règle 1.15. *Si l'on dit « alors », alors il faut dire « si ».*

Attention **Lecture de $\Rightarrow$**

La flèche d'implication $\Rightarrow$ ne peut pas se lire « donc ». « Donc » exprime la déduction ; or la langue symbolique sert à énoncer, pas à démontrer.

► Une proposition n'est pas une démonstration.

En résumé :

Attention **Signification de $\Rightarrow$**

Implication n'est pas déduction ; la flèche d'implication $\Rightarrow$ (si… alors…) ne signifie pas « donc ».

En effet, déduire, c'est enchaîner les affirmations vraies grâce à une argumentation solide ; de P, déduire Q, c'est affirmer la vérité de P, puis, par divers moyens, celle de Q. Ce n'est pas la même chose que corréler la vérité de Q et celle de P !

Exemple 1.16.

- « Je pense, donc je suis » n'est *pas* une implication : Descartes constate qu'il pense, et en *déduit* qu'il est. L'implication la plus proche serait plutôt « si je pense, alors je suis ».
- En démocratie, « si vous êtes reconnu coupable, vous irez en prison ». En dictature, « vous êtes reconnu coupable, donc vous irez en prison ». La nuance n'est donc pas un simple détail.

Peut-être le lecteur doit-il s'entraîner à lire à voix haute $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$. La lecture littérale étant fastidieuse, une bonne alternative est « si P est vraie, alors Q implique R ». De même, on peut suggérer de rendre $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ par « si P implique Q, alors R est vraie ». Rappelons qu'il est en théorie inutile de préciser « est vraie » (voir règle 1.3), mais on le fait ici pour la compréhension orale.

Peut-être le lecteur doit-il aussi construire des tables pour $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$. Il verra qu'*elles ne sont pas équivalentes* ; on dit que l'opération $\Rightarrow$ n'est *pas* associative.

Remarques.

- À l'oral, on renverse parfois la phrase. Mais « Q si P » s'écrit bien : $P \Rightarrow Q$.
- L'implication $P \Rightarrow Q$ signifie que P est une condition *suffisante* de Q, car il suffit d'avoir P pour être sûr d'avoir Q.
- L'implication $P \Rightarrow Q$ signifie aussi que Q est une condition *nécessaire* de P, car si l'on a P, alors nécessairement on a aussi Q.
- En particulier, « $P \Rightarrow Q$ » peut se lire « P seulement si Q », pour souligner que P ne peut pas se produire sans que Q se produise aussi.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Tous ces renversements créent bien des confusions ; beaucoup de débutants s'y trompent. Comme pour tous les problèmes terminologiques, la seule façon de s'en sortir est de pratiquer. Nous conseillons de réfléchir *à chaque fois* et de toujours poser la question : « Si j'ai l'une, est-ce que j'ai l'autre ? »

Test 1.7 solution page 973

Dans chacune des phrases suivantes, compléter par « nécessaire » ou « suffisant(e) ».

1) $x = 1$ est une condition ... pour que $x^2 = 1$.

2) Le vrai est une condition ... du faux.

3) $ab = 0$ est ... pour que $a = 0$.

4) Être isocèle est une condition ... pour être équilatéral.

5) Pour que x soit pair, il est ... que x soit divisible par 4.

Attention **Sens d'écriture**

On n'écrit jamais « $Q \Leftarrow P$ ». Ce n'est pas le sens de lecture ordinaire, et un lecteur hâtif aurait vite fait de se tromper.

Le symbole $\Leftarrow$ est toléré *seulement comme « titre »*, au moment de démontrer des équivalences (voir section II.3). Pour écrire la réciproque, il faut échanger P et Q.

Définition 1.17. *Soit $P \Rightarrow Q$ une implication. L'implication réciproque (ou simplement : la réciproque) est $Q \Rightarrow P$. Sa valeur de vérité est* indépendante *de celle de $P \Rightarrow Q$.*

Exemple 1.18. Soit x un nombre réel. Si x est plus grand que 2, alors x est positif : cette implication est vraie. Sa réciproque est fausse.

Définition 1.19. *Soit $P \Rightarrow Q$ une implication. La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Sa valeur de vérité est* la même *que celle de $P \Rightarrow Q$.*

Exemple 1.20. Soit x un nombre réel. Si x est plus grand que 2, alors x est positif ; la contraposée est « si x est strictement négatif, alors x est strictement inférieur à 2 ».

Test 1.8 solution page 973

Traduire en symboles la proposition : « il est vrai que P implique Q seulement s'il est vrai que R implique S ».

Test 1.9 solution page 973

Traduire en symboles la proposition : « si P implique Q, alors R n'est pas une condition nécessaire de P ».

Test 1.10 solution page 973

Écrire côte à côte la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ et celle de $Q \Rightarrow P$.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

I.2.4. Équivalence

Avant de passer aux quantificateurs, introduisons un dernier symbole, familier mais cause des pires confusions.

Notation. La proposition « P si et seulement si Q » est notée $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$; elle s'appelle l'équivalence de P et de Q.

La proposition $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$ est vraie si P et Q ont la même valeur de vérité : toutes deux vraies, ou toutes deux fausses.

Règle 1.21. (Table de vérité de $\Leftrightarrow$)

P	Q	$\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Remarques.

- L'équivalence $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$ signifie ainsi que P est une condition *nécessaire et suffisante* de Q. Les problèmes comportent parfois la question : « trouver une CNS de P ». Cela signifie donc simplement qu'il faut déterminer une proposition Q (plus simple) équivalente à P.
- L'équivalence $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$ signifie à la fois que P implique Q (« si P, alors Q », ou encore « Q si P ») et que Q implique P (« si Q, alors P », ou encore « Q seulement si P ») : elle signifie bien « P si et seulement si Q »).

Remarque. Soit P et Q deux propositions. *Il ne faut pas confondre les deux choses suivantes, bien qu'elles portent le même nom* :

- le fait, pour P et Q, d'être équivalentes, c'est-à-dire d'avoir même valeur de vérité (voir définition 1.5) ;
- la proposition composée $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$ (que nous étudions dans cette section).

C'est contre cette confusion que nous mettions en garde le lecteur dans la section I.1.3. Dire que $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$ est vraie, c'est dire qu'il est vrai que P et Q ont la même valeur de vérité ; c'est donc affirmer que P et Q sont équivalentes.

Si l'on veut affirmer que deux propositions sont équivalentes, on peut ainsi le faire en français, ou en symboles. Les deux options. . . reviennent au même. Exprimons quelques équivalences trouvées jusqu'ici au moyen de ce symbole.

Exemple 1.22. Soit P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont vraies :

- $\neg\neg\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{P}$;
- $\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \Leftrightarrow \neg\mathsf{P} \vee \neg\mathsf{Q}$;
- $\neg(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \Leftrightarrow \neg\mathsf{P} \wedge \neg\mathsf{Q}$;
- $(\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{P} \vee \mathsf{Q})$;
- $\neg(\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}) \Leftrightarrow (\mathsf{P} \wedge \neg\mathsf{Q})$;
- $(\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}) \Leftrightarrow (\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q} \wedge \mathsf{Q} \Rightarrow \mathsf{P})$.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Méthode **Oublier les tables de vérité**

Une fois qu'on a bien assimilé toutes les règles relatives aux connecteurs et qu'on les trouve intuitives, on les utilise directement sans plus jamais faire de table de vérité.

Test 1.11 solution page 973

Trouver de tête, *directement en français*, la négation des propositions suivantes.

1) Quand il neige ou pleut, je lis Lewis Carroll et j'évite les kangourous.

2) Tarski rase Gödel si et seulement si Gödel rase Tarski.

I.3. Quantificateurs

Le lecteur sait certainement que les énoncés mathématiques ne s'arrêtent pas là ; en mathématiques, on dit plutôt des choses comme : « pour tout réel x on a que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ », ou « $x^2 = -1$ n'a pas de racine réelle », ce qui revient à affirmer que tous ou certains objets d'un ensemble vérifient telle ou telle propriété. C'est possible grâce aux quantificateurs $\forall$ et $\exists$, que le lecteur connaît déjà sans doute. Cette sous-section est conçue en réaction aux trop nombreuses façons de les maltraiter.

Il n'y a pas de table de vérité pour les quantificateurs.

I.3.1. Propositions dépendant d'une variable

Pour poursuivre il faut amender un peu ce qui précède. Parfois, les propositions dépendent d'une ou de plusieurs variables x, y, z. On note alors plutôt $P(x)$ pour l'indiquer. Par exemple, on noterait $P(x)$ la proposition « $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ». On ne peut pas vraiment dire que $P(x)$ ait une valeur de vérité (car qui est x ?). Pourtant toutes les constructions vues précédemment avec les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ restent possibles, et les équivalences restent correctes.

I.3.2. Quantification universelle

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, qui appartient à un ensemble $\mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ peut être par exemple $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, mais le lecteur doit savoir qu'il y a beaucoup d'autres ensembles, et notamment des ensembles qui ne sont pas des « ensembles de nombres »).

Notation. La proposition « pour tout x dans $\mathbb{E}$, $P(x)$ » est notée $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$.

Remarque. D'autres formulations sont au choix :

◇ « tout élément x de $\mathbb{E}$ vérifie $P(x)$ » ;
◇ « pour tout x de $\mathbb{E}$, on a $P(x)$ » ;
◇ « pour tout x dans $\mathbb{E}$, $P(x)$ est vraie » ;
◇ « pour chaque x dans $\mathbb{E}$, $P(x)$ ».

Bien sûr, $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$ équivaut à $\forall y \in \mathbb{E}, P(y)$: le choix de la variable est sans importance (pourvu que ce soit la même après le $\forall$ et dans P). C'est la même chose qu'en calcul intégral, où $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(y)dy$ ont le même sens.

En particulier, on peut parfois escamoter la variable à l'oral, et dire : « tout élément de $\mathbb{E}$ satisfait P ». Mais à l'écrit, il faut quand même noter une variable, dont on dit qu'elle est *muette* (absente à l'oral).

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Attention **Position du quantificateur**

On quantifie à gauche, pas à droite ! On n'écrit *jamais* « $P(x), \forall x \in \mathbb{E}$ ».

La raison de cette interdiction sera claire sitôt que l'on aura plusieurs quantificateurs (voir section I.3.4).

Attention **Ensemble d'appartenance**

Il est essentiel de noter l'ensemble d'appartenance pour éviter les confusions. Par exemple, on a $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$, mais pourtant $\neg \forall x \in \mathbb{C}, x^2 \neq -1$.

(L'honnêteté commande en fait de reconnaître que pour le spécialiste de logique, c'est tout le contraire : les quantificateurs ne sont pas sur le même plan que le symbole d'appartenance.)

Attention **Variable après le quantificateur**

On n'écrit *jamais* « $\forall f(x) \in \mathbb{E}, \ldots$ ». Si l'on écrivait « $\forall \sin x \in \mathbb{R}_+$ », parlerait-on des réels positifs de la forme $\sin x$? des nombres de la forme $\sin x$ pour x réel positif ? des réels x tels que $\sin x$ soit positif ?

Remarque. On trouve parfois « $\forall x > 0$ » à la place de « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ». De même, $\forall x \geqslant A, P(x)$ remplace parfois $\forall x \in [A, \infty[, P(x)$, ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant A \Rightarrow P(x)$.

Ces abréviations sont déconseillées en raison de nombreuses confusions possibles :

- ◇ cela peut perturber les calculs de négation, détaillés à la section I.4 ;
- ◇ cela peut entraîner le débutant à des écritures comme « $\forall x \geqslant A \Rightarrow P(x)$ ». C'est hautement incorrect, car « $\Rightarrow P(x)$ » n'est pas une proposition.

I.3.3. Quantification existentielle

Soit encore $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x appartenant à un ensemble $\mathbb{E}$.

Notation. La proposition « il existe x dans $\mathbb{E}$ tel que $P(x)$ » est notée $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$.

Remarque. D'autres formulations sont au choix :

- ◇ « il existe x dans $\mathbb{E}$ vérifiant $P(x)$ » ;
- ◇ « il y a un x dans $\mathbb{E}$ tel que $P(x)$ » ;
- ◇ « il y a au moins un x dans $\mathbb{E}$ tel que $P(x)$ est/soit vraie » ;
- ◇ « il y a un élément de $\mathbb{E}$ qui satisfait P ».

Remarque. On trouve souvent l'écriture $\exists x \in \mathbb{E} | P(x)$, ou encore $\exists x \in \mathbb{E}/P(x)$. Nous déconseillons ces formes désuètes, qui nuisent à la symétrie avec $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$. Le prix à payer en revanche est qu'il faut se souvenir de dire « tel que », alors qu'on n'a rien fait pour le transcrire.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Attention **Tel que**

Quand on dit « il existe », il faut dire « tel que ». La phrase « il existe un nombre complexe z z au carré égale moins un » n'est bien sûr pas française : à dire à l'oral !

On peut y penser en se rappelant qu'après « il existe », *il faut lire la virgule*. C'est d'autant plus troublant que la virgule est toujours muette après un « pour tout ». Cette virgule est d'ailleurs facultative, bien que très fréquente.

Remarques.

◇ Quitte à digresser un peu, donnons une bonne raison d'écrire $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$ plutôt que $\exists x \in \mathbb{E} | P(x)$. Nous désirons la symétrie entre $\exists$ et $\forall$. Les deux constructions grammaticales sont différentes en français (après « il existe », le « tel que » est indispensable), mais *c'est une propriété du français*, qui n'a pas de raison de se transmettre à la langue mathématique. Le mathématicien préfère une notation souple et limpide, qui n'hérite pas des bizarreries du langage ordinaire. Avouons que ce point de vue n'est pas dominant parmi les enseignants de langue française, et que la notation | ou / pour « tel que » est très répandue.

◇ On voit que le problème est l'emploi du verbe « exister ». Pour rendre la prononciation orale symétrique, on pourrait dire *systématiquement* « pour tout x dans $\mathbb{E}$, $P(x)$ » et « pour (au moins) un x de $\mathbb{E}$, $P(x)$ », ou systématiquement « tout x de $\mathbb{E}$ satisfait P » et « (au moins) un x de $\mathbb{E}$ satisfait P ». La pratique est rare.

Quoi qu'il en soit, rappelons les principes de base de l'écriture des quantificateurs.

Attention **Rappel des règles**

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ obéissent à des règles strictes :
◇ ils sont suivis d'une variable ;
◇ cette variable appartient à un ensemble ;
◇ enfin vient une proposition.

I.3.4. Plusieurs quantificateurs

À partir de là on peut enchaîner les quantifications pour construire des propositions complexes. Voici donc une série de mises en garde.

Attention **Variables trop utilisées**

On ne doit pas employer la même variable dans des sens différents. La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ » pose en effet des difficultés d'interprétation...

► Attention à l'ordre : déplacer des quantifications peut changer le sens d'une proposition.

Exemple 1.23. Voici la définition de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Il se trouve que c'est équivalent à l'écriture suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

En revanche, ce n'est pas la même chose que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Cette dernière propriété est appelée continuité uniforme de f ; c'est un concept d'analyse abordé au chapitre 20. Le lecteur devrait lire à voix haute ces trois assertions.

Attention **Non-permutation des quantificateurs**

On ne doit *jamais* permuter des quantificateurs de nature différente. On peut permuter deux $\forall$ consécutifs, ou deux $\exists$ consécutifs.

Exemple 1.24. « Paris : un homme renversé par une voiture tous les jours » est l'archétype du titre mal construit. Littéralement, il signifie qu'il existe un Parisien qui, chaque jour, se fait renverser. Il faudrait plutôt écrire : « Paris : tous les jours, un homme renversé par une voiture ».

Remarques.

- ◇ Il est à présent clair que les quantificateurs doivent s'écrire à gauche. Si l'on écrivait « $P(x,y), \forall x \in A, \exists y \in B$ », que voudrait-on dire ? Que pour tout x il y a un y, etc. ? Ou en se rapprochant de P, qu'il existe un y tel que pour tout x, etc. ?
- ◇ De même, « $\forall x \in A, P(x,y), \exists y \in B$ » et le merveilleux « $\begin{matrix}\forall x \in A \\ \exists y \in B\end{matrix}, P(x,y)$ » font bien rire le correcteur, mais vous élimineront.

Parlons un peu plus des quantificateurs *de même nature* et de la façon de les noter.

Remarques.

- ◇ La proposition $\forall x \in A, \forall y \in B, P(x,y)$ peut se lire parfois « pour tout x dans A et tout y dans B ». Il va de soi qu'il est défendu d'écrire « $\forall x \in A \wedge \forall y \in B$ ». (Le symbole $\wedge$ sert à connecter des propositions, pas à faire des énumérations.)
- ◇ Le lecteur au courant du produit cartésien sait aussi que l'on peut noter cela

$$« \forall (x,y) \in A \times B,\ \ P(x,y) »$$

(ou bien sûr « $\forall (y,x) \in B \times A, P(x,y)$ »). Il faut noter les parenthèses.
- ◇ Autre incorrection : on lit parfois « $\forall x, y \in A, \ldots$ » au lieu de « $\forall (x,y) \in A^2, \ldots$ ».

Exemple 1.25. Traduisons en symboles l'affirmation suivante (d'ailleurs fausse) :

Tout réel x tel que $x^2 \geqslant 1$ est positif.

Il y a un piège. Il s'agit bien d'une quantification universelle sur $x \in \mathbb{R}$, mais le « tel que » dissimule en fait une implication. On trouve « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 0$ ».

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Test 1.12
solution page 973

Écrire : « il existe un réel epsilon et un entier n tels que pour tous réels x et y, l'écart entre f de x et f de y est au plus n fois l'écart entre x et y à la puissance epsilon ».

Test 1.13
solution page 973

Lire à voix haute les propriétés suivantes.

1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.

3) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geqslant A, f(x) \geqslant M$.

Test 1.14
solution page 973

Noter en langue symbolique les affirmations suivantes :

1) Il existe un réel x tel que f de x soit nul.

2) Pour tout réel x, si f de x est nul, alors x est positif.

3) Pour tout réel il existe un réel plus grand où f s'annule.

Test 1.15
solution page 973

Soit X un ensemble d'individus et Y un ensemble de films. On considère la proposition $P(x, y)$, dépendant de deux variables $x \in X$ et $y \in Y$, qui signifie : « x a vu y ». Traduire en symboles les énoncés suivants :

1) Quelqu'un a vu tous les films.

2) Chaque film a été vu.

3) Il y a un film que tout le monde a vu.

4) Quelqu'un a vu un film.

I.3.5. Une abréviation fréquente

En mathématiques on s'occupe d'existence, et aussi d'unicité : quand on veut par exemple dire qu'une équation ou un système d'équations possède *une unique* solution. Il existe une notation dédiée.

Notation. La proposition « il existe un *unique* x dans $\mathbb{E}$ tel que $P(x)$ » est notée $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un quantificateur. La proposition $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$ est en fait la conjonction de deux propositions : l'affirmation de l'existence et l'affirmation de l'unicité.

L'existence et l'unicité sont symétriques dans le sens suivant : l'existence de x dans $\mathbb{E}$ vérifiant $P(x)$ signifie qu'il y a *au moins un* x avec les bonnes propriétés, alors que l'unicité signifie qu'il y en a *au plus un*.

L'*unicité* revient à dire que si l'on a deux éléments vérifiant P, alors ils sont égaux :

$$\forall x_1 \in \mathbb{E}, \forall x_2 \in \mathbb{E}, P(x_1) \wedge P(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

On peut donc considérer que $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$ est l'affirmation composée

$$(\exists x \in \mathbb{E}, P(x)) \wedge (\forall x_1 \in \mathbb{E}, \forall x_2 \in \mathbb{E}, P(x_1) \wedge P(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Remarque. L'affirmation $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$ est ainsi équivalente à

$$\exists x \in \mathbb{E}, \quad \left[P(x) \wedge \left(\forall x' \in \mathbb{E}, P(x') \Rightarrow x' = x\right)\right].$$

Pour le voir il faut bien sûr *comprendre le sens* (voire écrire une démonstration), mais surtout pas chercher à faire un « calcul logique ».

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

I.4. Négations

Il est contre l'usage d'écrire $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$.

Attention **Négation des propositions quantifiées**

On ne doit *jamais* barrer les quantificateurs. Le symbole de négation $\neg$ sert précisément à cela.

Remarques.

- ◇ Rappelons qu'on peut barrer les relations comme $=, \in, \subseteq$, mais jamais les propositions (et comme nous l'avons dit, surtout pas les quantificateurs).
- ◇ Il est inutile de mettre des parenthèses quand on nie une proposition quantifiée. On écrit simplement « $\neg\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ » ; il n'y a pas d'ambiguïté.

Un peu de bon sens (il n'y a pas de tables de vérité ici) justifie la règle suivante.

Règle 1.26. (Négation des propositions quantifiées)

- ◇ *La proposition* $\neg\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$ *équivaut à* $\exists x \in \mathbb{E}, \neg P(x)$.
- ◇ *La proposition* $\neg\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$ *équivaut à* $\forall x \in \mathbb{E}, \neg P(x)$.

Exemple 1.27.

- ◇ « Tous les étudiants étaient-ils là ? – Non. – Alors quelqu'un était absent. » Cette déduction illustre la vérité de l'implication $(\neg\forall x \in \mathbb{E}, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{E}, \neg P(x))$ (ici $\mathbb{E}$ est l'ensemble des étudiants, et $P(x)$ est le fait d'être présent).
- ◇ « Et toi, tu as eu des étudiants hier ? – Non. – Alors ils étaient tous ailleurs. » Cette déduction illustre la vérité de l'implication $(\neg\exists x \in \mathbb{E}, P(x)) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{E}, \neg P(x))$.

Les réciproques sont vraies, mais même quand ils parlent entre eux, les professeurs de mathématiques évitent les équivalences.

Il est indispensable de bien savoir calculer des négations avant de passer à la suite.

Exemple 1.28. À titre d'exemple, nions une proposition rencontrée plus tard (voir chapitre 20). Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant donnée, on dit que f est uniformément continue si elle vérifie

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

(« Pour tout epsilon, il existe êta tel que pour tous réels x et y, si la valeur absolue de x moins y est plus petite que êta, alors la valeur absolue de f de x moins f de y est plus petite que epsilon. »)

Rappelons qu'il est inutile de mettre des parenthèses quand on nie des propositions quantifiées, mais qu'il est prudent d'en conserver en présence de connecteurs logiques. La négation se détermine comme suit, de tête :

$$\begin{array}{llll}
\neg\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, & \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \,; \\
\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, & \neg\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \,; \\
\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, & \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, & \neg\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \,; \\
\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, & \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, & \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \neg(|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon) \,; \\
\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, & \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, & \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |x-y| < \eta \wedge |f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon.
\end{array}$$

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Remarque. Voici une remarque pour qui tiendrait à noter « $\forall \varepsilon > 0, \dots$ » au lieu de « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \dots$ » (ce que nous déconseillons).

Il faut bien faire attention à ce que, comme « $\forall \varepsilon > 0, P(\varepsilon)$ » signifie en fait « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, P(\varepsilon)$ », sa négation est « $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \neg P(\varepsilon)$ », c'est-à-dire « $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \neg P(\varepsilon)$ ».

On a pourtant vu d'apprentis mathématiciens s'embrouiller et remplacer, au cours de la négation, le « $\varepsilon > 0$ » par un « $\varepsilon \leqslant 0$ » !

Test 1.16 solution page 973

Nier les propositions suivantes.

1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, q \geqslant p \geqslant n_0 \Rightarrow u_q \geqslant u_p$.

3) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant A$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Test 1.17 solution page 974

Reprendre le test précédent et déterminer *directement à l'oral* les négations.

Test 1.18 solution page 974

Écrire directement de tête la négation de $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$.

II. Démonstrations

Une rédaction mathématique ne consiste pas en une suite d'opérations et de symboles ; c'est un *texte* écrit dans le langage usuel et correctement argumenté. Son but est de convaincre.

- La langue mathématique sert à énoncer, pas à démontrer.
- Les démonstrations se font dans la langue usuelle.

Le formalisme et le français sont deux langues bien distinctes, qui ne doivent pas être mélangées dans les phrases. Cela a pour conséquence le principe suivant.

Attention **Symboles et abréviations**

Les symboles ne sont pas des abréviations. Une démonstration est un texte formé de phrases correctes et complètes.

Le lecteur doit impérativement se défaire de certains travers souvent encouragés au lycée. Les démonstrations ne sont pas des calculs ; elles s'écrivent dans le langage usuel ; le langage symbolique ne sert qu'aux énoncés intermédiaires, qui sont les *étapes* du raisonnement, pas le raisonnement lui-même. C'est, nous l'avons dit, la même différence qu'entre une position et un déplacement. Ajoutons que pour le mathématicien, le critère de recevabilité d'une démonstration n'est pas seulement sa rigueur, c'est aussi sa clarté.

Pour toutes ces raisons le débutant « sèche » souvent face à la démonstration demandée. Il aimerait plutôt se rassurer en la menant entièrement en langue symbolique, comme s'il s'agissait d'un calcul. Or non seulement c'est impossible mentalement, mais si c'était fait en pratique, ce serait illisible.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Remarque. À titre anecdotique, mentionnons toutefois qu'une branche de la logique appelée « théorie de la démonstration » explique le lien entre calcul et preuve. Les démonstrations écrites depuis ce point de vue formel, parfois obtenues par ordinateur, sont parfaitement correctes mais dénuées de sens intuitif (un peu comme visionner un morceau de musique numérisé sous forme de 0 et de 1).

Une démonstration est une suite de déductions. Elle n'est rigoureuse que si l'on est *capable* d'expliquer chaque étape. Attention, cela ne veut pas dire que l'on *doit* expliquer chaque étape ! Par exemple, il est superflu d'écrire :

> Supposons $2x + 1 \geqslant 2y + 1$. Alors on peut soustraire 1 des deux côtés, et cela préserve la relation d'ordre. On trouve ainsi $2x \geqslant 2y$. On peut à présent diviser par 2 qui est un réel strictement positif, si bien que $x \geqslant y$.

On écrit bien sûr :

> Supposons $2x + 1 \geqslant 2y + 1$. Alors $x \geqslant y$.

Si l'on écrit tous les détails, on n'en sort pas : la démonstration de « $1 + 1 = 2$ » aurait pris des centaines de pages à Russell et Whitehead lors de leur entreprise de formalisation des mathématiques. Mais si l'on omet les détails importants, la démonstration cesse d'être rigoureuse. Ici encore, seule la pratique permet d'apprécier le niveau de détail à fournir ; il dépend aussi du lecteur.

II.1. Règles élémentaires

Ce qu'on appelle au lycée « raisonnement par équivalences » marche très rarement (nous y reviendrons). Il est donc indispensable de connaître d'autres techniques de démonstration. En fait, analyser la structure de la proposition à démontrer donne énormément d'indications de méthode pour en écrire la démonstration. Les principes suivants tiennent pour la plupart du simple bon sens.

Méthode **Démonstration de $P \wedge Q$**

1. Démontrer P.
2. Démontrer Q.
3. Conclure.

En fait, l'ordre est sans importance : on sait en effet que $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont équivalentes.

Pour démontrer $P \vee Q$, c'est un peu plus subtil. *A priori* il faudrait démontrer P ou démontrer Q, mais c'est alors beaucoup plus précis que ce qui est demandé, et d'ailleurs, sauf exception rarissime, on ne saurait pas s'il faut attaquer P ou Q... Il y a deux principales possibilités :

- la « démonstration par l'absurde » (expliquée à la section II.5) ;
- la « démonstration par cas », expliquée ci-après.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Méthode **Démonstration de $P \vee Q$ par cas**

1. Diviser la situation en plusieurs cas *qui recouvrent toutes les possibilités.*
2. Dans certains cas, démontrer P.
3. Dans les autres cas, démontrer Q.
4. Conclure.

Exemple 1.29. Soit n un entier. Démontrons que n^2 est congru à 0 ou 1 modulo 4.

On distingue quatre cas, selon la classe de n modulo 4.

1) Si n est de la forme $4k$, alors il est clair que 4 divise n^2.

2) Si n est de la forme $4k+1$, on voit que n^2 aussi.

3) Si n est de la forme $4k+2$, on voit que 4 divise n^2.

4) Si n est de la forme $4k+3$, on voit que n^2 est de la forme $4\ell+1$.

Comme les cas couvrent toutes les possibilités, on a bien démontré que n^2 est congru à 0 ou 1 modulo 4.

Remarque. Dans l'exemple précédent, les quatre cas s'excluent mutuellement. *Ce n'est nullement indispensable* ; l'essentiel est que toutes les possibilités aient été couvertes.

La démonstration par cas pâtit d'une certaine inélégance confinant parfois à l'illisibilité. Le lecteur peut se renseigner sur le « théorème des quatre couleurs », et s'interroger sur la valeur esthétique et pratique d'un argument reposant sur l'étude de plusieurs centaines de cas.

Sans aller dans ces extrêmes, nous pouvons suggérer un bon indice de ce que la démonstration sera sans doute par cas : *quand l'hypothèse elle-même est de la forme* $A \vee B$.

Test 1.19 solution page 974

Soit n un entier. Démontrer que n^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3.

Enfin nous ne pouvons pas résister au plaisir de montrer au lecteur un grand classique.

Exemple 1.30. Montrons qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

On sait (si besoin voir exemple 1.37) que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On va montrer que $a = b = \sqrt{2}$ conviennent, ou que $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, $a = b = \sqrt{2}$ conviennent. Sinon, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, et $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ est rationnel, donc $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent.

Faisons remarquer qu'à la fin de la démonstration, on ne sait toujours pas ce qu'il faut prendre : $a = b = \sqrt{2}$, ou $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$. On a bien démontré la disjonction, mais pas mieux !

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

II.2. Implication

Rappelons que la proposition $P \Rightarrow Q$ signifie que si P est vraie, alors Q aussi. La méthode est en conséquence.

Méthode **Démonstration de $P \Rightarrow Q$**

1. Supposer P.
2. Démontrer Q.
3. Conclure.

En général, pour démontrer Q on a besoin de P. Si P n'est pas utilisée, alors en fait on a démontré Q, ce qui est beaucoup plus fort ; une relecture s'impose certainement.

Une variante est le raisonnement par contraposition. Comme $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée (voir définition 1.19) $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sont équivalentes, il suffit de démontrer la seconde.

Méthode **Démonstration de $P \Rightarrow Q$ par contraposition**

1. Supposer $\neg Q$.
2. Démontrer $\neg P$.
3. Conclure.

Exemple 1.31. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (n^2 impair) $\Rightarrow$ (n impair).
Raisonnons par contraposition. Nous allons montrer que si n est pair, alors n^2 aussi. Supposons en effet n pair. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. Notamment $n^2 = 4m^2$ est également pair.

Remarque. La démonstration par contraposition ne modifie pas la *difficulté* de la démonstration (elle diffère en cela de la démonstration par l'absurde expliquée à la section II.5). Mais elle modifie sa *présentation*, et c'est déjà énorme dans beaucoup de cas.

II.3. Équivalence

Pour montrer une équivalence, on montre deux implications. En pratique, le fameux « raisonnement par équivalences » ne marche (presque) jamais.

Méthode **Démonstration de $P \Leftrightarrow Q$**

1. Démontrer $P \Rightarrow Q$.
2. Démontrer $Q \Rightarrow P$.
3. Conclure.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Exemple 1.32. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrons que $x = 0 \Leftrightarrow x^2 + e^x = 1$. On procède en deux temps.

($\Rightarrow$) Si $x = 0$, il est clair que $x^2 + e^x = 1$.

($\Leftarrow$) Supposons $x^2 + e^x = 1$. On sait que x^2 est toujours positif. Ici, comme x est positif, on a en outre $e^x \geqslant 1$, donc x^2 et $e^x - 1$ sont tous deux positifs. Comme leur somme est nulle, on a $x^2 = 0$, donc $x = 0$.

On a donc bien l'équivalence.

Rappelons que le symbole $\Leftarrow$ n'est toléré que pour indiquer qu'on démontre une réciproque, comme dans l'exemple ci-dessus.

Remarque. Pourquoi le « raisonnement par équivalences » ne marche-t-il presque jamais ? Parce que $P \Rightarrow Q$ signifie seulement « si P est vraie, alors Q aussi ». En particulier, on ne peut jamais prédire la structure d'une démonstration de $P \Rightarrow Q$. Il arrive donc souvent qu'une démonstration de $P \Rightarrow Q$ et une démonstration de $Q \Rightarrow P$ n'aient pas grand-chose en commun.

La « démonstration par équivalences » est alors impossible : elle ne marche que si l'on a un argument *palindrome*, qui se lit dans les deux sens. Mais même dans un cas simple comme l'exemple 1.32, on a dû trouver *deux* arguments distincts.

(Au moment d'aborder les systèmes d'équations linéaires au chapitre 10, et de multiplier les lignes par des paramètres peut-être nuls, le lecteur fera bien de garder tout cela en tête. Rien n'irrite davantage le mathématicien que des symboles $\Leftrightarrow$ malvenus.)

Supposons maintenant que l'on ait à démontrer que trois propositions P, Q, R sont équivalentes. Naïvement, on établirait deux équivalences, c'est-à-dire quatre implications. Il est plus astucieux d'utiliser un « procédé circulaire ».

Méthode **Démonstration de $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$**

1. Démontrer $P \Rightarrow Q$.
2. Démontrer $Q \Rightarrow R$.
3. Démontrer $R \Rightarrow P$.
4. Conclure.

Cela garantit bien l'équivalence, mais on a démontré trois implications au lieu de quatre !

Évidemment *l'ordre* dans lequel on démontre ces trois implications précises ne change rien. Mais on aurait pu atteindre le même résultat en démontrant plutôt $P \Rightarrow R$, puis $R \Rightarrow Q$, puis $Q \Rightarrow P$ (ce ne sont *pas les mêmes* implications : on « tourne dans l'autre sens »).

► Les implications peuvent être plus ou moins faciles à démontrer.

Face à des équivalences, il faut toujours réfléchir avec soin au lieu de se lancer tête baissée. Et penser à vérifier, à la fin, qu'on a bien « fait un tour complet ».

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

II.4. Quantificateurs

Le lecteur croit peut-être que les choses vont se compliquer ici. En fait, elles restent simples pourvu qu'on voie la démonstration comme un *texte*, et pas comme un calcul de valeurs de vérité.

II.4.1. Quantification universelle

Ici encore, la méthode est presque mécanique.

Méthode **Démonstration de $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$**

1. Prendre un x quelconque dans $\mathbb{E}$. Cela s'écrit : « Soit $x \in \mathbb{E}$. »
2. Démontrer $P(x)$ sans faire d'hypothèses particulières sur x.
3. Conclure.

▶ Au moment de fixer un x quelconque, on le dit explicitement.

Remarque. « Sans faire d'hypothèses particulières sur x » signifie que la démonstration doit rester générale. Mais on peut faire une démonstration par cas sur x, pourvu que les différents cas couvrent toutes les possibilités et qu'on « élimine les hypothèses faites ».

Exemple 1.33. Démontrons $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$. Nous détaillons cet exemple à fond.

1. [Prendre un x quelconque dans $\mathbb{R}$.]
Soit $x \in \mathbb{R}$.

2. [Annonce de disjonction de cas.]
On distingue deux cas.

3. [Premier cas.]
Si $x \geqslant 0$, alors $x^2 \geqslant 0$ aussi.

4. [Second cas.]
Si en revanche $x \leqslant 0$, alors $x^2 = (-x)^2 \geqslant 0$ d'après le premier cas.

5. [Fin de la disjonction de cas.]
Donc dans les deux cas, on a $x^2 \geqslant 0$.

6. [Conclusion.]
Comme cela est vrai pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.

Il va de soi qu'on n'écrit jamais tout cela. On se contente de noter :

> Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas. Si $x \geqslant 0$, alors $x^2 \geqslant 0$ aussi. Si en revanche $x \leqslant 0$, alors $x^2 = (-x)^2 \geqslant 0$ d'après le premier cas. Donc dans les deux cas, nous avons $x^2 \geqslant 0$. Comme cela est vrai pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.

II.4.2. Quantification existentielle

Toutes les techniques exposées jusqu'à maintenant se font plus ou moins en « pilote automatique » : en regardant attentivement ce qu'on doit démontrer, on sait comment partir. Mais pour $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$, c'est plus subtil ; dès le début, il faut une idée.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Ces idées viennent d'une bonne connaissance du cours (voir section III), mais aussi du temps passé à réfléchir au problème ; il faut « tester » des éléments pour comprendre ce qui se passe.

Méthode **Démonstration de $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$**

1. Avoir une idée.
2. Construire un x dans $\mathbb{E}$ qui marchera. Cela s'écrit : « Soit $x \in \mathbb{E}$ tel que... », et suit une construction *possible*.
3. Démontrer que pour le x qu'on a donné, $P(x)$ est vraie.
4. Conclure.

► Au moment de fixer un x précis, on le dit explicitement.

Attention **Ne pas construire de chimères !**

Quand on écrit « Soit $x \in \mathbb{E}$ tel que... », il faut être sûr qu'il existe bien un tel x, soit parce que c'est évident, soit parce qu'on le démontre ou qu'on l'a démontré.

Exemple 1.34. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
On raisonne par contraposition. Supposant $a \neq 0$, on montre $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |a| > \varepsilon$. Soit en effet $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$. Comme on a supposé $a \neq 0$, on a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En outre on a $|a| > \varepsilon$. On a bien démontré $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |a| > \varepsilon$. Cela conclut la démonstration.

Voici un exemple plus complexe entièrement détaillé.

Exemple 1.35. Montrons qu'entre deux rationnels distincts il existe toujours un rationnel.

1. [Commençons par transcrire en symboles l'énoncé.]
On montre $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, (x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y)$.

2. [L'énoncé est de la forme $\forall \ldots$]
Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$. On veut montrer $(x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y)$.

3. [L'énoncé à montrer est à présent de la forme $P \Rightarrow Q$.]
Supposons $x < y$ et montrons $\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y$.

4. [L'énoncé à montrer est à présent de la forme $\exists \ldots$ Il faut une idée.]
Soit $z = \frac{x+y}{2}$.

5. [Vérifions que z convient.]
Clairement $x < z < y$ et $z \in \mathbb{Q}$; z convient donc.

6. [Cascade de conclusions ; facultative à partir d'un certain niveau.]
On a donc $\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y$.
Ainsi $(x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y)$.
Cela étant vrai pour x, y arbitraires dans $\mathbb{Q}$, on a enfin

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, (x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y).$$

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Ne pas oublier qu'au moment de construire un x qui résoudra la question, il faut le dire explicitement. De même, quand on « fixe un x général » (pour démontrer un $\forall$), on le dit.

Attention **Pas de variable sans invitation**

Toute variable employée doit être introduite. Si la lettre x apparaît dans une démonstration, alors à sa première occurrence, elle *doit* être précédée du mot « soit ».

Remarque. Le lecteur a remarqué que « soit » possède ainsi deux sens complètement opposés. Quand on prend un x dans $\mathbb{E}$ absolument quelconque et dont on ne sait rien, on écrit « soit $x \in \mathbb{E}$ ». Quand au contraire on a trouvé un bon x qui fait marcher une démonstration, on écrit (par exemple) « soit $x = 3$ ». Dans le premier cas, on prend un élément général ; dans le second, un élément particulier ; c'est pourtant le même mot « soit ».

II.4.3. Existence et unicité

Rappelons que le symbole $\exists!$ n'est pas vraiment un quantificateur, mais une abréviation commode pour « il existe un unique ». La méthode est en conséquence.

Méthode **Démonstration de $\exists! x \in \mathbb{E}, P(x)$**

1. Montrer l'existence.
2. Montrer l'unicité.
3. Conclure.

Remarque. L'ordre n'est pas fixe. En fait, en général, on prouve d'abord l'unicité, car c'est plus simple, et le temps passé permet de mieux se familiariser avec le problème. Souvent la démonstration de l'unicité donne une idée pour l'existence.

Rappelons que l'unicité est l'affirmation $\forall x_1 \in \mathbb{E}, \forall x_2 \in \mathbb{E}, P(x_1) \wedge P(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. La structure de la démonstration est toute trouvée.

Méthode **Démonstration de l'unicité**

1. Prendre x_1 et x_2 dans $\mathbb{E}$ vérifiant P (« Soit x_1 et x_2, etc. »).
2. Montrer que $x_1 = x_2$.
3. Conclure.

Exemple 1.36. Montrons qu'il existe au plus une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f'(x) = 1 + \cos^2(x)$, et $f(0) = 2$.

Supposons en effet que f et g conviennent. Alors on a $f' = g'$, et $f(0) = g(0)$. Notamment si l'on pose $h = f - g$, alors h est dérivable de dérivée nulle et s'annule en 0. Comme l'intervalle de définition de h est $\mathbb{R}$, h est la fonction nulle (cet argument se retrouve au chapitre 26). On a donc $f = g$, ce qui démontre l'unicité.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Dans cet exemple, on n'a même pas montré qu'une telle fonction existait (et ici, l'argument ne donne pas vraiment de moyen de le faire).

II.5. Démonstration par l'absurde

Parfois on sèche complètement. La démonstration par l'absurde peut mettre le pied à l'étrier.

Méthode **Démonstration de P par l'absurde**

1. Supposer $\neg P$.
2. Démontrer quelque chose d'évidemment faux, ou de contradictoire avec ce qu'on a démontré/supposé par ailleurs.
3. Conclure : « C'est absurde (ou : Contradiction). On a donc P. »

Cela permet de créer *ex nihilo* l'hypothèse de travail $\neg P$, ce qui peut donner l'impulsion à la preuve. La contrepartie est qu'il faut une certaine maturité psychologique pour arriver à raisonner avec une hypothèse dont on cherche en sous-main à montrer qu'elle est fausse : cela revient à pouvoir se concentrer sur quelque chose que l'on sait impossible, afin de comprendre pourquoi c'est impossible.

Remarque. La suprême élégance est de supposer $\neg P$ et de redémontrer P (qui est alors contradictoire) sans que ce soit artificiel.

Exemple 1.37. Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Supposons en effet que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors il existe des entiers a et b premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On trouve alors $a^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair. Si a était impair, a^2 le serait aussi : donc a est pair, il existe un entier k tel que $a = 2k$. Mais alors $b^2 = 2k^2$, donc on voit que b est pair. Ainsi 2 divise-t-il a et b, qui ne sont donc pas premiers entre eux. Contradiction. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ici on n'a même pas annoncé explicitement la démonstration par l'absurde (l'emploi du subjonctif « soit » est le seul indice).

Le lecteur remarquera comme le calcul est réduit au minimum dans l'argument précédent. Une démonstration mathématique peut, en quelques lignes, contenir énormément d'idées. Il ne faut pas se sentir stupide si l'on a besoin de la relire quatre ou cinq fois !

Test 1.20 solution page 974

Démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

La démonstration par l'absurde fournit une bonne méthode pour démontrer une disjonction. On rappelle en effet que $\neg(P \vee Q)$ équivaut à $\neg P \wedge \neg Q$.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Méthode **Démonstration de $P \vee Q$ par l'absurde**

1. Supposer $\neg P \wedge \neg Q$.
2. Démontrer une contradiction.
3. Conclure $P \vee Q$.

On ne savait même pas précisément ce qu'on voulait montrer, et en choisissant la démonstration par l'absurde, en supposant $\neg P \wedge \neg Q$, on s'est créé *deux* hypothèses gratuites !

Remarque. La démonstration par l'absurde semble faire des miracles ; elle a en fait un coût de nature épistémologique. Mais comme la quasi-totalité des mathématiciens accepte cette technique sans en noter les difficultés, nous n'entrerons pas dans les détails.

II.6. Démonstration par récurrence

À proprement parler, la « démonstration par récurrence » n'est pas sur le même plan que les méthodes précédentes. C'est en fait une propriété des entiers naturels, et plus précisément de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Elle apporte néanmoins une technique importante à connaître.

Soit à montrer une proposition $P(n)$ dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Une méthode parfois utile est de procéder comme suit.

Méthode **Démonstration de $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence**

1. Rappeler $P(n)$ et annoncer la récurrence.
2. Démontrer $P(0)$.
3. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1))$.
4. Conclure.

Parfois on ne commence pas en 0 ; le lecteur le sait sans doute.

Exemple 1.38. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'énoncé $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$. Démontrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

- La proposition $P(0)$ est évidente, car elle affirme $5^2 \geqslant 4^2 + 3^2$.
- Démontrons $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1))$. Pour cela, on fixe $n \in \mathbb{N}$; on suppose $P(n)$ et l'on démontre $P(n+1)$. En effet,

$$\begin{aligned} 5^{(n+1)+2} &= 5 \cdot 5^{n+2} \\ &\geqslant 5 \cdot (4^{n+2} + 3^{n+2}) \quad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant 4 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} \\ &= 4^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \end{aligned}$$

  donc $P(n+1)$ est vraie. On a ainsi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, et n étant quelconque, on a bien démontré $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- On a donc $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On conclut par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Cela reste assez lourd. On pourra par la suite accélérer la chose.

En $n = 0$, la propriété voulue revient à $5^2 \geqslant 4^2 + 3^2$, qui est évidente. On suppose donc la propriété en n fixé et on la montre en $n+1$. En effet, on a

$$5^{(n+1)+2} = 5 \cdot 5^{n+2} \geqslant 5 \cdot (4^{n+2} + 3^{n+2}) \geqslant 4 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} = 4^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2}$$

donc la propriété est vraie en $n+1$. On conclut par récurrence.

Remarque. La démonstration par récurrence n'est bien sûr possible que si l'on sait très exactement ce qu'on veut démontrer. Pour cette raison on peut lui reprocher d'être un peu scolaire : *les idées ne viennent pas par récurrence.*

On fait aussi parfois de la « récurrence étendue », où l'hypothèse ne porte pas seulement sur n, mais sur tous les entiers de 0 à n.

Méthode **Démonstration de $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence étendue**

1. Rappeler $P(n)$ et annoncer la récurrence.
2. Démontrer $P(0)$.
3. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}, ((\forall k \in \{0, \ldots, n\}, P(k)) \Rightarrow P(n+1))$.
4. Conclure.

Remarques.

- Parfois on ne commence pas en 0.
- Quand on aura pris de l'assurance, on pourra rédiger de façon moins scolaire.
- C'est en fait *exactement la même technique*. Sans entrer dans le détail, la démonstration par récurrence étendue de $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ revient à la démonstration par récurrence ordinaire de $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$, où $Q(n)$ est la proposition :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, P(k).$$

  La récurrence étendue n'est plus forte qu'en apparence. Mais du point de vue de la rédaction, elle est parfois beaucoup plus adaptée que la récurrence ordinaire.

Le lecteur notera que dans l'exemple suivant, on procède par récurrence sans l'annoncer. C'est certainement plus concis, mais aussi moins clair ; nous ne conseillons pas forcément cette approche au débutant.

Exemple 1.39. Démontrons que tout entier $\geqslant 2$ possède un facteur premier. Soit en effet n un entier. Si n est premier, on a fini. Sinon, n s'écrit sous la forme $n = ab$, où a et b sont des entiers différents de 1. Notamment $2 \leqslant a < n$, donc, par récurrence, a possède un facteur premier ; n aussi.

Remarque. La récurrence admet la variante suivante, dite du « contre-exemple minimal » (ou de « descente infinie ») :

Par l'absurde, on suppose $\exists n \in \mathbb{N}, \neg P(n)$. On considère alors l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$ des contre-exemples. Comme A est un ensemble d'entiers supposé non vide, il possède un plus petit élément n_0. On montre alors, partant de n_0, qu'il existe un autre contre-exemple encore plus petit. C'est une contradiction.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Mais cette technique n'est qu'une façon d'enrober la récurrence étendue. En effet, tout cela tourne autour du fait que $0, \ldots, n_0 - 1$ ne sont pas des contre-exemples...

Une petite mise en garde : on ne peut pas démontrer par récurrence $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ ni $\forall k \in \mathbb{Z}$, $Q(k)$, sauf à étendre le sens du mot « récurrence » (ce qu'a fait la théorie formelle des ensembles).

III. Conseils de rédaction

Cette troisième section est destinée plus spécifiquement aux étudiants qui manqueraient encore d'assurance dans l'art d'écrire une démonstration. On y donne quelques conseils, et l'on y mentionne certains écueils courants.

N'oubliez pas qu'une démonstration n'est pas une proposition. Elle ne peut donc pas être « vraie » ou « fausse » : les propositions seules le sont. Une démonstration est plus ou moins convaincante. Il est essentiel de montrer qu'on en maîtrise tous les détails, même s'il ne faut pas forcément les donner tous. Il est également important de montrer que l'on sait où l'on va. Tout compte, y compris la présentation.

III.1. Conseils de méthodologie

Pour apprendre à bien rédiger, le mieux est d'*imiter* quelqu'un qui sait faire.

► Recopiez des démonstrations. *Il faut le faire régulièrement.*

◇ Ne cherchez pas à raccourcir, ni même à noter avec des abréviations, les démonstrations vues en cours. Les enseignants savent (en général) ce qu'ils font, à la virgule près.
Évitez notamment de mélanger français et symboles.
◇ Recopier les démonstrations est d'ailleurs la seule façon de les comprendre et de les apprendre vraiment.

► Vous n'avez compris une démonstration que quand vous pouvez l'écrire de tête.

◇ Cela prend du temps, mais les mathématiques tiennent de la poésie hermétique plus que du roman de gare.
◇ Dix lignes peuvent résister dix jours. Si cela vous arrive, sachez que *c'est normal*.

► Le vrai contenu d'un cours n'est pas les définitions et théorèmes, ce sont les *démonstrations* et les *méthodes*.

► Apprenez à extraire les méthodes de vos cours, en les signalant dans la marge, et en faisant des fiches-méthodes.

◇ Par exemple, faites une fiche « Méthodes pour montrer qu'une fonction est continue ».
◇ Il est recommandé d'avoir établi de telles fiches avant d'attaquer les exercices.
◇ Les exemples vus en cours servent d'ordinaire à illustrer des méthodes (souvent laissées implicites), mais les démonstrations du cours en contiennent aussi !

► La clef d'un exercice est souvent cachée dans le cours !

III.2. Conseils de présentation de la copie

◇ Il y a des codes de rédaction. Par exemple, chaque abréviation est vécue par le correcteur comme une insulte personnelle. N'écrivez *jamais* « exo » pour « exercice ».
◇ Encadrer les conclusions n'est pas le plus important. Le correcteur sait que votre conclusion est l'énoncé de la question – que vous soyez de bonne foi ou non.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Mais un devoir bien présenté expose plutôt son *articulation logique* ; une politique astucieuse de marges et de retraits aère la copie, et dispose favorablement à votre égard. Les correcteurs ont l'obsession de la copie « structurée », qui reflète une pensée « structurée », émanant d'un esprit « structuré ».

▶ Indiquez systématiquement ce que vous allez démontrer, et les hypothèses en cours.

◇ Vous le faites pour le lecteur, *mais aussi pour vous* : cela aide à garder à l'esprit ce que l'on démontre. Notamment il peut être utile *à l'étudiant* de recopier l'énoncé d'une question.

◇ Le calcul étant illisible par essence, on ne lira les vôtres qu'en diagonale. D'ailleurs, si le résultat est faux, le correcteur ne le lira probablement pas.
Ne mettez donc pas l'accent sur le calcul ; ne croyez pas qu'un calcul suffit. Il faut *toujours* un mot d'introduction indiquant les techniques utilisées, et de conclusion, fût-ce « donc $x = 0$ ».

◇ Il vaut mieux éviter de commencer les phrases par une minuscule. N'écrivez pas

« f est dérivable. »

car la minuscule heurte l'œil (sinon le vôtre, du moins celui du correcteur). Préférez

« On a que f est dérivable. » ou « La fonction f est dérivable. »

◇ Un vieux truc de correcteur : l'adverbe « forcément » dans une copie attire l'attention. L'étudiant qui l'écrit cherche à convaincre, parfois même à *se* convaincre, de la rigueur d'un point douteux. *S'il vous vient sous la plume, relisez-vous* ; l'argument est suspect. C'est comme bredouiller à un contrôle de police.

III.3. Conseils de correction

◇ Une démonstration est conduite en bon français ; que l'on veille à respecter la syntaxe, l'orthographe et la ponctuation. Rigoureux comme des juristes et la mansuétude en moins, les mathématiciens enlèvent parfois, en douce, des points aux copies chargées de fautes.

◇ Comme les symboles ne sont pas des abréviations, ne pas mêler mots et symboles : « on suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable en x » est très maladroit.

◇ Beaucoup d'étudiants croient bien faire en remplaçant le mot « donc » par une flèche $\Rightarrow$; cette substitution est naïve et malvenue. On écrit *en toutes lettres* « P, *donc* Q ». Rappelons que « d'où », « par conséquent », « si bien que », et nombre d'autres, permettent de varier un peu.
On peut aussi s'enhardir et écrire « puisque P, on a Q » ou autre ; on évitera tant que possible, pour le confort du lecteur, de renverser la phrase en « Q, puisque P ».
(Précisons à toutes fins utiles que « comme P, donc Q » et « puisque P, donc Q » *ne sont pas correctes* en français : simplement « P, donc Q » ou « comme P, Q ».)
Mais le plus sage au début est sans doute de s'en tenir à la litanie : « P. Donc Q. D'où R. Par conséquent S, etc. ».

Attention **L'erreur la plus fréquente !**

L'étudiant qui affirme qu'il a P et qu'il en déduit Q écrit souvent « $P \Rightarrow Q$ ».
C'est une grave erreur. En effet, affirmer P et en déduire Q, c'est dire « j'ai P, ce qui implique Q ». Mais écrire « $P \Rightarrow Q$ », c'est seulement dire « P implique Q ».

▶ À l'oral, entendez-vous la différence entre « P implique Q » et « P, ce qui implique Q » ?

▶ Une proposition n'est pas une démonstration.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Attention **La deuxième erreur la plus fréquente !**

Suite de la précédente mise en garde. Écrire sur une copie

$$\begin{array}{l} \quad P \\ \Rightarrow Q \\ \Rightarrow R \end{array}$$

devrait être *éliminatoire* pour les raisons suivantes :
◇ le symbole « $\Rightarrow$ » désigne une implication, non pas une déduction ;
◇ de toute façon, $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ *n'a aucun sens.*
Espérons que cette fois suffira.

Attention **À éviter absolument !**

Les écritures suivantes sont à proscrire :
◇ « $\exists\sqrt{x} \in \mathbb{E}, \dots$ », et plus généralement « $\exists f(x) \in \mathbb{E}, \dots$ » ;
◇ « $\not\forall x \in \mathbb{E}, \dots$ » et « $\nexists x \in \mathbb{E}, \dots$ » ;
◇ « $\exists x \wedge y \in \mathbb{E}, \dots$ » et « $\exists x \in \mathbb{E} \wedge \exists y \in \mathbb{E}, \dots$ » ;
◇ « $\forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow \dots$ », « $\exists x \in \mathbb{E} \wedge \dots$ », et autres.

III.4. Conseils d'aide à la réflexion

Au fond nous n'avons jusqu'à présent listé que des réflexes à prendre. Les vraies méthodes sont les démarches qui aident l'intuition.

III.4.1. Conseils de notation

► Une bonne notation peut soulager la difficulté.

Le choix d'une notation ne se fait pas à la légère. Prenez donc les habitudes suivantes.

◇ Ne pas choisir le même nom pour des objets distincts.
Une fois la démonstration finie, les noms « temporaires » redeviennent disponibles.
◇ Vous pouvez noter A, B, C des ensembles, et a, b, c des éléments. Si vous avez d'autres éléments, choisissez a, a', a'' ; si vous ignorez en quel nombre, prenez a_1, a_2, etc.
◇ Si soudain vous voulez voir les ensembles A comme des éléments d'un ensemble plus gros, passez à $\mathscr{A}$.
◇ Il est bon de connaître les lettres grecques, en minuscules et majuscules, *avec leur nom.*
◇ Il est très important que la notation *rappelle la différence entre ce qui est fixe et ce qui est variable.* Par exemple, si vous étudiez la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un réel est fixé et un autre est variable. Il est courant d'appeler le premier x_0 et le second x. La définition de la continuité en x_0 s'écrit ainsi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Cette écriture rappelle que x_0 est « fixé ».
Mais on pourrait aussi écrire la définition de la continuité en un point x comme suit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

Cette fois, x est fixé et y est variable : on risque de s'y perdre.

III.4.2. Savoir où l'on va

L'expérience montre que souvent l'étudiant a du mal à comprendre ce qu'il est en train de faire.

- Indiquez bien les hypothèses.
- Gardez trace en permanence de ce que vous cherchez à démontrer.

> **Exemple 1.40.** Démontrons que la suite (u_n) tend vers 0. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Je cherche (ou : nous cherchons) $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n| < \varepsilon$.

- Une bonne copie n'hésite pas à employer « je cherche », « je veux démontrer que », « il suffirait que », voire « j'admets que ».

Remarque. Complément du conseil précédent : dans les mauvaises copies s'enchaînent les affirmations mathématiques, sans qu'on sache si elles sont vraies, fausses, à démontrer, à réfuter, indécidables, etc.

Ne pas prendre ses désirs pour des réalités, c'est avant toute proposition indiquer son statut : « je cherche à démontrer que », etc.

Enfin rappelons qu'il est toujours bon de contrôler ce qu'on a démontré. Si c'est trop contre-intuitif, ou en désaccord avec l'énoncé, ou beaucoup plus fort que ce qui est demandé, il faut reprendre la question.

Toutes les règles édictées plus haut sont bien sûr trop rigides ; l'élégance et la fluidité viendront le jour où l'étudiant aura commencé à s'en affranchir. Nous espérons ce jour proche, et lui souhaitons bien du plaisir.

III.5. Démonstrations fautives

Et pour finir, voici quelques rédactions fautives pour diverses raisons.

III.5.1. Une copie niveau bac

Voici ce qu'il ne faut pas faire.

> **Exemple 1.41.** Calculons $\int_1^e \ln x \, dx$.
>
> $$u'(x) = 1 \Leftrightarrow u(x) = x, \qquad v(x) = \ln x \Leftrightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$
>
> $$\Rightarrow \int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx =$$
> $$e - (e-1) = 1$$

Avec de la mauvaise volonté (à laquelle le correcteur a droit), on ne comprend rien.

- Qui est u ? Qui est v ? Si ce sont des fonctions, où sont-elles définies ?
- Qui est x ?
- Plutôt qu'écrire l'équivalence $u(x) = x \Leftrightarrow u'(x) = 1$, l'étudiant voulait dire qu'avec sa définition (manquante), *les deux sont vrais*. Ce n'est pas la même chose !
- D'ailleurs cette équivalence serait plutôt une implication.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

◇ D'où sort le calcul ?
◇ On ne finit pas une ligne par $=$, ni $\leqslant$, ni $\geqslant$, etc.
◇ On ne commence pas une ligne par $\Rightarrow$.
◇ L'étudiant voulait sans doute dire « donc », ce qui n'est pas la même chose.

Voici une rédaction plus longue, mais qui rapporte plus de points.

Exemple 1.42. Calculons $\int_1^e \ln x dx$.

Considérons les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \ln x$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Ces deux fonctions sont de classe C^1 et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. On peut alors faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx \\ &= e - (e-1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

L'intégrale proposée vaut donc 1.

► Plus que vos calculs, c'est votre capacité à argumenter rationnellement qui est jugée.

► Rappelons la différence entre :

◇ « P équivaut à Q ($P \Leftrightarrow Q$) » (on affirme une équivalence) ;
◇ « P, ce qui équivaut à Q » (on affirme *les deux*).

La seconde phrase *ne peut pas être mise en symboles.*

III.5.2. L'art de se perdre

Exemple 1.43. Montrons que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$ est continue en 1.

La définition de la continuité s'écrit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon.$$

Soit ε fixé. Alors pour x réel,

$$|x-1| < \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon.$$

Or $|x^2 - 1| = |(x-1)(x+1)|$. Quitte à prendre $\eta < 1$, quand $|x-1| < \eta$ on aura x entre 0 et 2 ; alors $|x^2 - 1| = (x+1)|x-1| < 3|x-1| < \varepsilon$. Donc $|x-1| < \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$. Donc il existe η tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon.$$

Fort bien, mais la première fois que l'étudiant a écrit :

$$|x-1| < \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$$

il *cherchait* en fait η ayant cette propriété. Il s'est visiblement déconcentré, et au moment de relire cette ligne, a cru qu'il avait déjà trouvé η !

Rappelons qu'une bonne copie n'hésite pas à employer « je cherche », « je veux démontrer que », « il suffirait que », voire « j'admets que ».

Aucune proposition ne doit avoir un statut ambigu, même à lecture rapide.

III.5.3. L'art de perdre son lecteur

Soit A, B deux ensembles, $f : A \to B$ une fonction surjective, et $D \subseteq B$. Montrons que $f(f^{-1}(D)) = D$, en procédant par double inclusion.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

> Soit $x_1 \in f(f^{-1}(D))$. Alors par hypothèse il existe $x_2 \in f^{-1}(D)$ tel que $x_1 = f(x_2)$. Comme $x_2 \in f^{-1}(D)$, il existe $x_3 \in D$ tel que $x_3 = f(x_2)$. Ainsi $x_1 = x_3 \in D$, donc $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$.
> Soit à présent $x_4 \in D$. Comme f est surjective, il existe $x_5 \in A$ tel que $f(x_5) = x_4$. Alors par définition $x_5 \in f^{-1}(D)$. Donc $\exists x_6 \in f^{-1}(D), x_4 = f(x_6)$. Cela signifie $x_6 \in f(f^{-1}(D))$. Ainsi $D \subseteq f(f^{-1}(D))$.

Il n'y a hélas pas grand-chose à redire quant au fond (sauf l'introduction de x_3, complètement superflue) ; pour la forme, c'est illisible :

- à la fin d'un segment de démonstration, les variables reprises dans une quantification redeviennent disponibles ;
- de toute façon, les notations sont trop peu parlantes.

Voici une meilleure suggestion :

> Soit A, B deux ensembles, $f : A \longrightarrow B$ une fonction surjective, et $D \subseteq B$. Montrons que $f(f^{-1}(D)) = D$, en procédant par double inclusion.
> Montrons que $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$. Soit $b \in f(f^{-1}(D))$. Alors par hypothèse il existe $a \in f^{-1}(D)$ tel que $b = f(a)$. Comme $a \in f^{-1}(D)$, $f(a) \in D$, donc $b \in D$. Ainsi $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$.
> Montrons que $D \subseteq f(f^{-1}(D))$. Soit à présent $d \in D$. Comme f est surjective, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = d$. Alors par définition $a \in f^{-1}(D)$, donc $d \in f(f^{-1}(D))$. Ainsi $D \subseteq f(f^{-1}(D))$.

Et là au moins, on comprend où « vivent » les différents éléments, c'est-à-dire que les notations aident à comprendre l'argument.

Attention toutefois : dans la première partie, on a noté b un élément dont on veut montrer qu'il est dans D. Le noter d depuis le début induirait certainement en erreur le lecteur (et aussi le rédacteur).

III.5.4. Une récurrence

Démontrons par récurrence que si dans un bouquet de fleurs l'une est rouge, alors toutes sont rouges.

Soit F l'ensemble des fleurs. Soit $R(f)$ la propriété pour une fleur $f \in F$ d'être rouge. Soit $P(n)$ la proposition dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$: « tout bouquet à n fleurs qui contient une fleur rouge est rouge ». Commençons par traduire $P(n)$ en symboles :

$$\forall f_1 \in F, \dots, \forall f_n \in F, \quad (\exists i \in \{1, \dots, n\}, R(f_i)) \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, R(f_i)).$$

Nous démontrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

- La propriété est triviale en $n = 1$: en effet, elle équivaut à $\forall f \in F, R(f) \Rightarrow R(f)$.
- Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. On suppose $P(n)$ et l'on montre $P(n+1)$: soit $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$ des éléments de F. On suppose $\exists i \in \{1, \dots, n+1\}, R(f_i)$, et l'on montre $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, R(f_i)$. À permutation près, on peut supposer $i = 1$. Alors considérant $\{f_1, \dots, f_n\}$, comme $R(f_1)$ est vraie, on déduit de $P(n)$ que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, R(f_i)$.
  Considérons à présent les n dernières fleurs : $\{f_2, \dots, f_{n+1}\}$. Comme f_n en fait partie et que $R(f_n)$ est vraie, on a grâce à $P(n)$ que $\forall i \in \{2, \dots, n+1\}, R(f_i)$.
  Notamment $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, R(f_i)$. Cela démontre $P(n+1)$.
- Par récurrence, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

La partie de traduction est là pour impressionner ; le pire est qu'on le lit parfois. Cela ne sert qu'à rendre l'argument plus obscur, et le lecteur accordera que nous y avons plutôt bien réussi.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini

En effet, mise en notations moins pompeuses, la « démonstration » révélerait vite sa faiblesse : l'étape dite d'hérédité fait n'importe quoi pour $n = 2$, conformément d'ailleurs à l'intuition. La seule conclusion de tout cela est que l'excès de formalisme nuit gravement à la compréhension.

III.5.5. Pour finir...

Voici enfin un argument imparable, dû au logicien Haskell Curry :

> Démontrons que $1 = 0$. Soit $S = \{x \text{ tel que } x \in x \Rightarrow 1 = 0\}$.
> Supposons $S \in S$. Alors par définition, $S \in S \Rightarrow 1 = 0$. Mais comme $S \in S$, on déduit $1 = 0$.
> Supposant $S \in S$, on a démontré $1 = 0$. On a donc établi $S \in S \Rightarrow 1 = 0$.
> Cela est la définition de $S \in S$. Mais comme on l'a vu plus haut, $S \in S$ entraîne $1 = 0$.
> On a donc $1 = 0$.

Le plus troublant est que la déduction est parfaitement correcte. La définition de S est en revanche illicite ; cela signifie que les opérations ensemblistes ont des limites, qu'il y a certaines règles sur ce qu'on peut construire ou pas. C'est tout à fait passionnant, mais la théorie des ensembles est une autre histoire, qui sera contée une autre fois.

© 2013 Pearson France – Mathématiques L1, 2e éd. – Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini