ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, ÉLECTRONIQUE, AUTOMATIQUE

1A – Cycle de transition – Année 2014-2015

ATELIER DE RENFORCEMENT NUMÉRIQUE : EXAMEN DU MARDI 20 JANVIER

Durée de l'épreuve : 90 minutes

L'examen comporte ***trois exercices****. Documents et calculatrices sont* ***interdits****.*
La qualité de la rédaction et la présentation entreront dans l'appréciation des copies.

L'intégralité du sujet devra être rendue avec la copie.

Exercice 1 [9 points]

Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ et $g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f, par $\mathscr{C}_g$ celle de g. Soit $I_f = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_g = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

1.a. Calculer la dérivée f' de la fonction f et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

1.b. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales D_1 et D_2 ; préciser leurs équations.

1.c. Déterminer une équation de la tangente T_f à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2.a. Que vaut $I_f + I_g$? *On utilisera la linéarité de l'intégrale.*

2.b. Déterminer une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2.c. En déduire la valeur exacte de I_g puis la valeur exacte de I_f.

3. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4.a. Montrer que l'égalité $g(x) = f(-x)$ est vraie quel que soit le réel x.

4.b. En déduire que $\mathscr{C}_g$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par une symétrie que l'on déterminera.

5. Sur l'**ANNEXE**, réaliser le tracé de D_1 et D_2, de la tangente T_f et des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Colorier la partie du plan dont l'aire est égale à I_f et la partie du plan dont l'aire est égale à I_g.

Exercice 2 [5 points]

Sans justifier, donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de chacune des équations différentielles suivantes.
$(E)\ :\ y'+2xy=0 \qquad (F)\ :\ y''-4y'+4y=0 \qquad (G)\ :\ (1+x^2)y'+2xy=1+3x^2 \qquad (H)\ :\ y'=xe^xy$

Exercice 3 [6,5 points]

On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ pour tout nombre complexe z.

1.a. Déterminer deux réels α et β tels que $P(z) = (z+1)(z^2+\alpha z+\beta)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

1.b. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. On pose $a = -1$, $b = 2 + i\sqrt{3}$, $c = 2 - i\sqrt{3}$ et $d = 3$. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $c - a$, celle du nombre complexe $a - b$, celle du nombre complexe $d - b$.

3. Dans un repère orthonormé direct du plan, on note A, B, C et D les points dont les affixes respectives sont a, b, c et d. Déterminer la nature du triangle ABC et la nature du triangle ABD. *Aucun dessin n'est exigé.*

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Prénom NOM : ______________________________